Partiel n°1 .

Durée: 1 heure.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Vous avez le droit à votre feuille verte mais pas à la calculatrice.

$\boxed{1}$ Soit le modèle d'échantillonage suivant : $X_1, ..., X_n$ *i.i.d.* de loi $\mathcal{Q}_\theta$, $\theta > 2$ où $\mathcal{Q}_\theta$ est la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{]-\theta/2,\theta/2[}(x).$$

Le paramètre d'intérêt est θ.

[a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.

[b] Soit $\hat{\theta}_1 := 2\max(X_i)$. Cet estimateur $\hat{\theta}_1$ est-il biaisé ? Consistant ?

[c] Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_1$?

[d] Calculer le moment d'ordre 2 de la loi $\mathcal{Q}_\theta$, et en déduire un estimateur par la méthode des moments noté $\hat{\theta}_2$. Est-il consistant ?

[e] Quel est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_2$?

[f] Calculer $\mathcal{Q}_\theta(X \leq 1)$ et en déduire un estimateur par la méthode des moments noté $\hat{\theta}_3$ est-il consistant ?

[g] Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_3$?

[h] Quel estimateur préférerez vous ?

$\boxed{2}$ Soit $\mathbf{V}$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ dont les composantes sont notées X_1, X_2 et X_3. On suppose que X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

[a] Quelle est la loi du vecteur $\mathbf{V} = (X_1, X_2, X_3)^t$? Quelle est la densité de $\mathbf{V}$?

[b] Soit P la matrice de changement de base orthonormée telle que

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

On note X le vecteur colonne de composantes $(X_i)_{i=1,2,3}$ et Y le vecteur colonne $Y = P^t X$ de composantes $(Y_i)_{i=1,2,3}$

Quelle est la loi du triplet (Y_1, Y_2, Y_3) ?

Déterminer les lois de Y_1, Y_2 et Y_3 .

[c] On note $\bar{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$ et $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \bar{X})^2$.

Exprimer $\bar{X}$ en fonction des variables aléatoires Y_i.

Vérifier que $\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = \sum_{i=1}^{3} Y_i^2$.

Exprimer S^2 en fonction des variables aléatoires Y_i.

En déduire que $\bar{X}$ et de S^2 sont des variables aléatoires indépendantes.

[d] Donner la loi de $\bar{X}$ et de $2S^2$.

$\boxed{3}$ Le code d'ouverture d'un coffre-fort est composé d'un chiffre compris entre 0 et 9. A l'instant initial, ce code est fixé à 0. Pour tromper d'éventuels malfaiteurs, ce code est modifié toutes les heures à l'issue d'un tirage aléatoire selon une loi de Bernoulli : si le tirage donne 1, le code est incrémenté de 1 modulo 10 ; sinon, le code reste inchangé. Les tirages de Bernoulli étant indépendants et de même paramètre inconnu, donner le modèle statistique associé à cette expérience sur une durée de n heures.