

Partiel n°2 .

Durée: 1 heure.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Vous avez le droit à votre feuille recto-verso mais pas à la calculatrice.

[1] Soit le modèle d'échantillonnage suivant : $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{Q}_{\sigma^2}$, $\sigma^2 > 0$ où $\mathcal{Q}_{\sigma^2}$ est la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f_{\sigma^2}(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{x>0}$$

avec $\sigma > 0$. Cette loi est appelée loi de Rayleigh et on utilisera la notation habituelle $X_k \sim \mathcal{R}(\sigma^2)$. On admettra que les premiers moments d'une loi de Rayleigh sont donnés par les relations suivantes

$$\mathbb{E}_{\sigma^2}[X_k] = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \mathbb{E}_{\sigma^2}[X_k^2] = 2\sigma^2 \quad \mathbb{E}_{\sigma^2}[X_k^3] = 3\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_{\sigma^2}[X_k^4] = 8\sigma^4$$

Cet exercice étudie différents estimateurs du paramètre $\theta = \sigma^2$.

- [a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.
- [b] Est-ce que le modèle est identifiable? Dominée?
- [c] Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}_1$.
- [d] Calculer le moment d'ordre 1 de la loi $\mathcal{Q}_{\theta}$, et en déduire un estimateur par la méthode des moments noté $\hat{\theta}_2$.
- [e] Soit $\hat{\theta}_3 := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$. Quel est le biais de $\hat{\theta}_3$? Sa variance? Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_3$?
- [f] Donner un intervalle de confiance à 98 pourcent de θ en utilisant $\hat{\theta}_3$.
- [g] Soit $\hat{\theta}_4 := \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)$. Quel est le biais de $\hat{\theta}_4$? Donner un nouvel estimateur non biaisé.

[2] **Modèle à deux variables explicatives** On considère le modèle de régression suivant :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i,2} + \beta_3 x_{i,3} + \beta_4 x_{i,4} + \epsilon_i.$$

Les $x_{i,j}$ sont des variables exogènes du modèle, les ϵ_i sont des variables aléatoires indépendantes, de loi normale centrée admettant la même variance σ^2 . En posant :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n,2} & x_{n,3} & x_{n,4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

on a observé

$$X'X = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 0 & 0 \\ 30 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad Y'Y = 400.$$

- [a] Déterminer la valeur de n , la moyenne des $x_{i,2}$, le coefficient de corrélation des $x_{i,2}$ et des $x_{i,3}$.
- [b] Estimer $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \sigma^2$ par la méthode des moindres carrés ordinaires.
- [c] Donner un intervalle de confiance de niveau 90 pourcent pour β_1 .
- [d] Donner un intervalle de confiance de niveau 80 pourcent pour σ^2 .

$$\Phi(t) = P(X \leq t) \text{ pour } X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

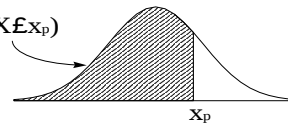
Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997

Table des quantiles de la v.a. de Student

Fournit les quantiles x_p tels que $P(X \leq x_p) = p$
pour $X \sim t_{dl}$

$$p = P(X \leq x_p)$$



p	0.7500	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950	0.9975	0.9990
dl								
1	1.0000	3.0780	6.3140	12.7060	31.8210	63.6570	127.3213	318.3088
2	0.8160	1.8860	2.9200	4.3030	6.9650	9.9250	14.0891	22.3271
3	0.7650	1.6380	2.3530	3.1820	4.5410	5.8410	7.4533	10.2145
4	0.7410	1.5330	2.1320	2.7760	3.7470	4.6040	5.5976	7.1732
5	0.7270	1.4760	2.0150	2.5710	3.3650	4.0320	4.7733	5.8934
6	0.7180	1.4400	1.9430	2.4470	3.1430	3.7070	4.3168	5.2076
7	0.7110	1.4150	1.8950	2.3650	2.9980	3.4990	4.0293	4.7853
8	0.7060	1.3970	1.8600	2.3060	2.8960	3.3550	3.8325	4.5008
9	0.7030	1.3830	1.8330	2.2620	2.8210	3.2500	3.6897	4.2968
10	0.7000	1.3720	1.8120	2.2280	2.7640	3.1690	3.5814	4.1437
11	0.6970	1.3630	1.7960	2.2010	2.7180	3.1060	3.4966	4.0247
12	0.6950	1.3560	1.7820	2.1790	2.6810	3.0550	3.4284	3.9296
13	0.6940	1.3500	1.7710	2.1600	2.6500	3.0120	3.3725	3.8520
14	0.6920	1.3450	1.7610	2.1450	2.6240	2.9770	3.3257	3.7874
15	0.6910	1.3410	1.7530	2.1310	2.6020	2.9470	3.2860	3.7328
16	0.6900	1.3370	1.7460	2.1200	2.5830	2.9210	3.2520	3.6862
17	0.6890	1.3330	1.7400	2.1100	2.5670	2.8980	3.2225	3.6458
18	0.6880	1.3300	1.7340	2.1010	2.5520	2.8780	3.1966	3.6105
19	0.6880	1.3280	1.7290	2.0930	2.5390	2.8610	3.1737	3.5794
20	0.6870	1.3250	1.7250	2.0860	2.5280	2.8450	3.1534	3.5518
21	0.6860	1.3230	1.7210	2.0800	2.5180	2.8310	3.1352	3.5272
22	0.6860	1.3210	1.7170	2.0740	2.5080	2.8190	3.1188	3.5050
23	0.6850	1.3190	1.7140	2.0690	2.5000	2.8070	3.1040	3.4850
24	0.6850	1.3180	1.7110	2.0640	2.4920	2.7970	3.0905	3.4668
25	0.6840	1.3160	1.7080	2.0600	2.4850	2.7870	3.0782	3.4502
26	0.6840	1.3150	1.7060	2.0560	2.4790	2.7790	3.0669	3.4350
27	0.6840	1.3140	1.7030	2.0520	2.4730	2.7710	3.0565	3.4210
28	0.6830	1.3130	1.7010	2.0480	2.4670	2.7630	3.0469	3.4082
29	0.6830	1.3110	1.6990	2.0450	2.4620	2.7560	3.0380	3.3962
30	0.6830	1.3100	1.6970	2.0420	2.4570	2.7500	3.0298	3.3852
35	0.6820	1.3060	1.6900	2.0300	2.4380	2.7240	2.9960	3.3400
40	0.6810	1.3030	1.6840	2.0210	2.4230	2.7040	2.9712	3.3069
45	0.6800	1.3010	1.6790	2.0140	2.4120	2.6900	2.9521	3.2815
50	0.6790	1.2990	1.6760	2.0090	2.4030	2.6780	2.9370	3.2614
100	0.6770	1.2900	1.6600	1.9840	2.3640	2.6260	2.8713	3.1737
inf	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	2.8070	3.0902

Percentage Points of the Chi-Square Distribution

Degrees of Freedom	Probability of a larger value of χ^2								
	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	6.63
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	9.21
3	0.115	0.352	0.584	1.212	2.366	4.11	6.25	7.81	11.34
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.39	7.78	9.49	13.28
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.63	9.24	11.07	15.09
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.84	10.64	12.59	16.81
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.04	12.02	14.07	18.48
8	1.647	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	20.09
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	21.67
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	23.21
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	24.72
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	26.22
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	27.69
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.12	21.06	23.68	29.14
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.25	22.31	25.00	30.58
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.37	23.54	26.30	32.00
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.49	24.77	27.59	33.41
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.60	25.99	28.87	34.80
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.72	27.20	30.14	36.19
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.83	28.41	31.41	37.57
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.04	30.81	33.92	40.29
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.24	33.20	36.42	42.98
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.43	35.56	38.89	45.64
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.62	37.92	41.34	48.28
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.80	40.26	43.77	50.89
40	22.164	26.509	29.051	33.660	39.335	45.62	51.80	55.76	63.69
50	27.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.33	63.17	67.50	76.15
60	37.485	43.188	46.459	52.294	59.335	66.98	74.40	79.08	88.38