

Partiel n°2 .

Durée: 1 heure 30.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Au début de votre copie, vous attesterez sur l'honneur que vous n'utilisez ni document ni calculatrice, et que vous travaillez seul(e).

Vous avez le droit à votre feuille recto-verso mais pas à la calculatrice.

[1] Soit le modèle d'échantillonnage suivant : $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{Q}_{\theta, \gamma}$, $\theta > 0$ où $\mathcal{Q}_{\theta, \gamma}$ est la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f_{\theta, \gamma}(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\gamma}{\theta}} \mathbb{1}_{x > \gamma}.$$

Les paramètres d'intérêt sont θ et γ .

- A) Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.
- B) Est-ce que le modèle est identifiable ? Dominée ?
- C) Dans un premier temps on va supposer γ connu et θ à estimer.
 - (a) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}_1$.
 - (b) Calculer le moment d'ordre 1 de la loi $\mathcal{Q}_{\theta, \gamma}$, et en déduire un estimateur par la méthode des moments noté $\hat{\theta}_2$.
 - (c) Soit $\hat{\theta}_3 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \gamma$. Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_3$?
 - (d) Donner un intervalle de confiance à 99 pourcent de θ en utilisant $\hat{\theta}_3$.
- D) Dans un deuxième temps on va supposer θ connu et γ à estimer.
 - (a) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\gamma}_1$.
 - (b) Calculer le moment d'ordre 1 de la loi $\mathcal{Q}_{\theta, \gamma}$, et en déduire un estimateur par la méthode des moments noté $\hat{\gamma}_2$.
 - (c) Soit $\hat{\gamma}_3 := \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\gamma}_3$?
 - (d) Donner un intervalle de confiance à 85 pourcent de γ en utilisant $\hat{\gamma}_3$.
- E) Et enfin on suppose que θ et γ sont à estimer.

Question Bonus : Que pouvez-vous dire dans ce cas ?

$$\Phi(t) = P(X \leq t) \text{ pour } X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997