

Partiel n°2

Durée: 45 minutes.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention : toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Le barème est susceptible de changer mais vous donne une idée du point de chaque question.

Vous avez le droit à votre feuille bleue mais pas à la calculatrice.

1 Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de matrice de transition

$$P = ((P(i, j))_{(i, j) \in E^2}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & * & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1/2 & * & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix}.$$

[a] (0,5pt) Déterminer les valeurs que l'on devrait mettre sous chaque étoile.

[b] (1pt) Calculer $\mathbb{P}_1(T_1 = \infty)$.

[c] (1,5pt) Effectuer la classification des états : déterminer les classes de récurrence et les états transitoires.

Dessiner son graphe.

[d] (2pt) Calculer les mesures invariantes.

2 **Chaîne de Markov à deux états.** On considère une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2\}$, dont la matrice de transition est $P = ((P(i, j))_{(i, j) \in E^2}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 2/4 \end{pmatrix}$.

On suppose que : $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \nu(1)$ et $\mathbb{P}(X_0 = 2) = \nu(2) = 1 - \nu(1)$

[a] (2,5pt) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1/X_0 = 1, X_2 = 2)$.

[b] (4pt) Calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\nu(1)$.

[c] (1,5pt) Calculer P^n .

[d] (1pt) Déterminer sa probabilité stationnaire π .

3 **Exemple d'application de la propriété de Markov faible.** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P . Montrer les relations suivantes :

[a] (3pt) $P^n(x, y) = \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_x(T_y = m) P^{n-m}(y, y)$ pour $n \geq 1$.

[b] (1pt) Si a est un état absorbant, $\mathbb{P}_x(X_n = a) = \mathbb{P}_x(T_a \leq n)$ pour $n \geq 1$.

4 (2pt) Quels sont les différentes méthodes que vous connaissez pour calculer ou approximer la probabilité invariante ?