Partiel N. 1

$\boxed{1}$ Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $X_0 = 0$, $X_1 = \xi_1$ et

$$\forall n \geq 1 \quad X_n = X_{n-1} + \xi_n.$$

1. Quelle est la loi de $X := (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Quel lien peut on (heuristiquement) voir entre X et le mouvement brownien ?

$\boxed{2}$ Soit $I = [0,T]$ (ou $I\!R_+$) et $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne orthonormale de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(I, dt)$ des fonctions $f : I \to I\!R$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur I. On note $\langle f, g\rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt$ le produit scalaire des fonctions $f, g \in \mathrm{L}^2(I, dt)$.

Soit $(\mathcal{N}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Soit $S_t^{(n)} := \sum_{k=0}^n \langle 1\!\!1_{\{[0,t]\}}, e_k\rangle \mathcal{N}_k$. Montrer que $\forall t \in I$, $S_t^{(n)}$ converge dans L^2 vers

$$B_t := \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle 1\!\!1_{\{[0,t]\}}, e_k\rangle \mathcal{N}_k.$$

2. Montrer que $B := (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien sur I.

$\boxed{3}$ **Le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle.** C'est une autre démonstration que celle vue en cours...

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Soient a et b tels que $0 \leq a < b$. On pose, pour $n \geq 0$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{2^n} (B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^2.$$

Calculer la moyenne et la variance de X_n puis trouver la limite *p.s.* de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que *p.s.*, la fonction $t \to B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial. On dit qu'une fonction $f : I\!R_+ \to I\!R$ est à variation finie sur l'intervalle $[a, b]$ si les sommes

$$\sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

sont bornées indépendamment de p et de la subdivision $a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b$.

$\boxed{4}$ Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et T un temps d'arrêt fini. Soit U une variable aléatoire positive $\mathcal{F}_T$ -mesurable. Montrer que

$$(\bar{B}_t)_{t\geq 0} = (\frac{1}{U^2} B^T_{U^2 t})_{t\geq 0}$$

est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$ (et donc aussi de U). On rappelle que $B_t^T = B_{T+t} - B_T$.