Université Rennes 1 — Master 1 Mathématique

Martingales et chaînes de Markov — année 2011-2012

Deuxième partiel

Exercice 1 : *Chaîne de Markov sur un triangle*

On considère une chaîne de Markov sur les sommets d'un triangle ABC. Cette chaîne est définie par les règles suivantes : à chaque instant on se déplace sur le sommet contigu en sens trigonométrique avec probabilité p et dans le sens des aiguilles d'une montre avec une probabilité $q = 1 - p$, où $0 < p < 1$.

1. Tracer le graphe et écrire la matrice de transition de cette chaîne.
2. Montrer que cette chaîne est irréductible, récurrente positive.
3. Calculer sa probabilité invariante π.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de p la probabilité invariante π est-elle réversible ?

Exercice 2 : *Arithmétique aléatoire*

On jette un dé à 6 faces n fois de suite. On note $X_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ le résultat du $i-$ème lancer, et $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(P_n)_{n\geq 0}$ la somme et le produit des résultats :

$$S_0 := 0, \;\; S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{et} \quad P_0 := 1, \;\; P_n := \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

On s'intéresse aux probabilités des évènements A_n, B_n et C_n :

$$A_n := \{S_n \equiv 0\ [13]\}, \quad B_n := \{P_n \equiv 0\ [11]\}, \quad C_n := \{P_n \equiv 1\ [11]\}.$$

Pour cela, on introduit les nouvelles variables Y_k et Z_k, les restes de la division euclidienne de S_k par 13 et P_k par 11, ce pour $k = 1, \ldots, n$:

$$Y_k = S_k\ [13] \in \{0, 1, \ldots, 12\}, \quad Z_k = P_k\ [11] \in \{0, 1, \ldots, 10\}.$$

1. Montrer que S_n et P_n sont des chaînes de Markov. Sont-elles récurrentes ?
2. On considère la chaîne $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_k := 5 \times S_k\ [10]$. Quelles sont les valeurs possibles de U_n ? Sa matrice de transition ? Sa mesure invariante ?
3. Montrer que la chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ est irréductible, récurrente positive.
4. Calculer sa probabilité invariante et en déduire la limite $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
5. La chaîne $(Z_n)_{n\geq 0}$ visite-t-elle 0 ? En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.
6. Calculez la probabilité invariante de la chaîne $(Z_n)_{n\geq 0}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$.