

DEUXIÈME PARTIEL

Exercice 1 : Être ou ne pas être (markovien) ?

1. La marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$ est une chaîne de Markov. Qu'en est-il de la marche aléatoire auto-évitante dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Z}^2$?
2. Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de *v.a.i.i.d* de loi $\mathcal{B}(1/2)$ sur $\{-1, +1\}$. Par récurrence, on définit $X = (X_n)_{n \geq 0} : X_0 = 1, X_1 = 1$ et pour $n \geq 1, X_{n+1} = X_n + \varepsilon_n X_{n-1}$. On pose ensuite $Y = (Y_n)_{n \geq 0} = (X_{n+1}, X_n)_{n \geq 0}, Z = (Z_n)_{n \geq 0} = (X_{n+2}, X_{n+1}, X_n)_{n \geq 0}$. Les suites X, Y, Z sont-elles des chaînes de Markov ?

Exercice 2 : Être ou ne pas être (malin) ?

Un joueur retourne une à une les cartes d'un jeu de 52 cartes. Il peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire "la prochaine est rouge" ; il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire. On note A_n l'évènement "la n -ième carte retournée est rouge", R_n le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes, et $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$.

1. Déterminer la loi de R_{n+1} sachant R_n . En déduire que $\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52-n}$.
2. Montrer que $X_n := \mathbb{P}(A_{n+1}|R_n)$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$.
3. Soit $\tau \in \{0, \dots, 51\}$ le temps où le joueur dit "la prochaine est rouge". Montrer que τ est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. Que peut-on conclure du théorème d'arrêt ?

Exercice 3 : Être ou ne pas être (homozygote)

Sur l'ensemble $E := \{0, \dots, N\}$, on considère la chaîne de Markov $(X_n^x)_{n \geq 0}$ issue de $x \in E$ de matrice de transition :

$$P_{i,j} = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

Autrement dit, la loi de X_{n+1}^x sachant que $X_n^x = i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, i/N)$.

1. Que valent les probabilités $P_{0,j}$ et $P_{N,j}$ pour $j \in E$. Quels sont les états absorbants, transitoires de la chaîne ?
2. Montrer que $\mathbb{P}_x$ -presque sûrement, la suite $(X_n^x)_{n \geq 0}$ est une martingale et que la limite $X_\infty^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n^x$ existe $\mathbb{P}_x$ -presque sûrement. Préciser la loi de X_∞^x .