

Partiel n°2

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

1 Dans une expérience, on relève le taux de pesticides présent dans un plant de salade. L'étude s'effectue sur $n = 12$ plants. Les résultats sont donnés ci-dessous :

0.5 1 1.5 0.3 2.3 1.1 0.9 1 1.1 1.3 2 1.5

On suppose que ces 12 observations suivent une loi normale $\mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$.

1) Donner une estimation par intervalle de confiance de la moyenne ν au niveau de confiance 95% en supposant que $\sigma^2 = 16$.

2) Certains biologistes ne sont pas d'accord avec l'hypothèse $\sigma^2 = 16$. Qu'en pensez-vous ? Ils proposent donc de supposer que σ^2 est inconnu. Calculer alors l'intervalle de confiance à 95% pour la moyenne ν .

3) Donner un intervalle de confiance pour la variance au niveau 95%. Les chercheurs qui n'acceptaient pas l'hypothèse $\sigma^2 = 16$ avaient-ils raison ?

2 Soit le modèle d'échantillonnage suivant :

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{Q}_\theta^{\otimes n}, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^*$$

où \mathcal{Q}_θ est la loi sur \mathbb{R}_+ de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}} \mathbb{1}_{]0,\theta]}(x).$$

Le paramètre d'intérêt est le paramètre de ce modèle.

- [a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.
- [b] Ce modèle est-il dominé ? Identifiable ?
- [c] Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}_0$.
- [d] Soit $\hat{\theta}_1 = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Quelle est la loi de $\hat{\theta}_1$?
- [e] Calculer le biais de $\hat{\theta}_1$. Que pouvez vous en déduire ?
- [f] Calculer l'espérance de X_1 et en déduire un estimateur des moments de θ , noté $\hat{\theta}_2$.
- [g] Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_1$? On pourra penser à étudier $Z_n = n(\hat{\theta}_1 - \theta)$.
- [h] Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_2$?
- [i] Question de cours (aucun calcul n'est demandé) : sur quel(s) critère(s) pourriez vous comparer $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ afin de savoir lequel est le plus pertinent ?

3 **Modèle à deux variables explicatives** On considère le modèle de régression suivant :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i,2} + \beta_3 x_{i,3} + \beta_4 x_{i,4} + \epsilon_i.$$

Les $x_{i,j}$ sont des variables exogènes du modèle, les ϵ_i sont des variables aléatoires indépendantes, de loi normale centrée admettant la même variance σ^2 . En posant :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n,2} & x_{n,3} & x_{n,4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

on a observé

$$X'X = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} -60 \\ 20 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y'Y = 159.$$

- [a] Déterminer la valeur de n , la moyenne des $x_{i,3}$, le coefficient de corrélation des $x_{i,2}$ et des $x_{i,3}$.
- [b] Estimer $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \sigma^2$ par la méthode des moindres carrés ordinaires.
- [c] Donner un estimateur de la variance de $\hat{\beta}$.
- [d] Donner un intervalle de confiance pour β_2 au niveau 95%.