

Partiel n°1

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

1 Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
Montrer que \bar{X}_n et $(X_1 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n)$ sont indépendantes, en déduire que \bar{X}_n et $(\max_{i=1, \dots, n} X_i - \min_{i=1, \dots, n} X_i)$ aussi.

2 Lois exponentielles et lois de Poisson. La durée écoulée entre l'arrivée de deux mails consécutifs dans la messagerie de Gérard suit une loi exponentielle de paramètre inconnu. On suppose que ces durées sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes.

- [a] Donner le modèle statistique issu de l'observation des instants d'arrivée des n premiers mails dans la messagerie.
- [b] L'observation est à présent le nombre de mails arrivés dans la messagerie jusqu'à l'instant t . Quel est le modèle statistique représentant cette expérience ?

3 Soit le modèle d'échantillonnage suivant :

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{U}([\theta, \theta + 1])^{\otimes n}, \quad \theta \in [0, 1]$$

où $\mathcal{U}([\theta, \theta + 1])$ est la loi uniforme sur $[\theta, \theta + 1]$. Le paramètre d'intérêt est le paramètre de ce modèle.

- [a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.
- [b] Ce modèle est-il dominé ?
Dans le cas où la réponse est oui, par quelle mesure est-il dominé ?
- [c] Le modèle est-il identifiable ?
- [d] Soit $\hat{\theta}_1 = \min_{i=1, \dots, n} X_i$ un estimateur de θ . Est ce un estimateur biaisé ? Quelle est sa vitesse ?
- [e] Soit $\hat{\theta}_2 = (\max_{i=1, \dots, n} X_i - 1)$ un estimateur de θ . Est ce un estimateur biaisé ? Quelle est sa vitesse ?
- [f] Soit $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{2}$ un estimateur de θ . Est ce un estimateur biaisé ? Quelle est sa vitesse ?
- [g] Question bonus : sur quel(s) critère(s) pourriez vous comparer ces trois estimateurs afin de savoir lequel(s) est(sont) le plus pertinent ?
- [h] Question bonus : avez vous une idée de comment on a pu choisir les différents estimateurs ?