

Partiel n°1

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

[1] Le code d'ouverture d'un coffre-fort est composé d'un chiffre compris entre 0 et 9. A l'instant initial, ce code est fixé à 0. Pour tromper d'éventuels malfaiteurs, ce code est modifié toutes les heures à l'issue d'un tirage aléatoire selon une loi de Bernoulli : si le tirage donne 1, le code est incrémenté de 1 modulo 10 ; sinon, le code reste inchangé. Les tirages de Bernoulli étant indépendants et de même paramètre inconnu, donner le modèle statistique associé à cette expérience sur une durée de n heures.

[2] Soient X , Y et Z trois variables aléatoires gaussiennes indépendantes gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. on définit la variable aléatoire U par

$$U = \frac{X + YZ}{\sqrt{1 + Z^2}}.$$

Déterminer une loi conditionnelle $\mathbb{P}_U^{Z=\cdot}$ de U sachant Z ; en déduire que U et Z sont indépendantes et déterminer la loi de U .

[3] Soient $X := (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0_{\mathbb{R}^n}, I_n)$, où I_n est l'application identité sur $\mathbb{R}^n$. On muni $\mathbb{R}^n$ de la norme 2. Montrer que les variables aléatoires $\|X\|_2^2$ et $\frac{X}{\|X\|_2}$ sont indépendantes.

[4] Soient les variables aléatoires X_1, X_2 i.i.d. de moyenne ν et de variance σ^2 . Lequel des deux estimateurs de ν non biaisés suivants conseilleriez-vous : $M_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ ou $M_2 = \frac{aX_1 + bX_2}{a+b}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a + b \neq 0$?

[5] Soit le modèle d'échantillonnage suivant :

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim \text{Ber}([\theta])^{\otimes n}, \quad \theta \in [0, 1]$$

où $\text{Ber}(\theta)$ est la loi de Bernoulli de paramètre θ . Le paramètre d'intérêt θ est le paramètre de ce modèle.

[a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.

[b] Ce modèle est-il dominé ?

Dans le cas où la réponse est oui, par quelle mesure est-il dominé ?

[c] Le modèle est-il identifiable ?

[d] Soit $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$ un estimateur de θ . Est ce un estimateur biaisé ? Consistant ?

[e] Soit $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{[n/2]} \sum_{i=1}^{[n/2]} X_{2i}$ un estimateur de θ . Est ce un estimateur biaisé ? Consistant ?

[f] Soit $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n X_i - 1)$ un estimateur de θ . Est ce un estimateur biaisé ? Consistant ?

[g] Question bonus : sur quel(s) critère(s) pourriez vous comparer ces trois estimateurs afin de savoir lequel(s) est(sont) le plus pertinent ?