Partiel n^{o}1

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Rappel la loi fonction gamma $\Gamma(c, b)$ admet pour densité

$$x \to \frac{b}{\Gamma(c)}(bx)^{c-1}e^{-bx}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x),$$

pour fonction caractéristique,

$$x \to \left(\frac{b}{b-it}\right)^c,$$

pour moyenne c/b et pour variance c/b^2.

$\boxed{1}$ Néo décide de tricher à ses examens. On suppose qu'à chaque fois, ses triches sont indépendantes. A chaque fois que Néo triche, il a une probabilité p de réussir.

Soit T le nombre de fois où Néo a réussi à tricher avant d'échouer pour la première fois.

1) Quelle est la loi de T ?

2) Ecrivez le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.

3) Le modèle est-il identifiable ? Dominé ?

$\boxed{2}$ Soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien dans $\mathbb{R}^2$ centré et de matrice de covariance l'identité $\mathbb{I}_2$. Soit (Z, Q) le vecteur aléatoire défini par $Z = (X + Y)/2$ et $Q = (X - Y)/2$. On pose

$$U = \frac{1}{2}(X - Z)^2 + \frac{1}{2}(Y - Z)^2$$

1. Calculer la matrice de covariance du couple (Z, Q).
2. Z et Q sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}[U]$ et $Var[U]$.
4. Montrer que Z et U sont indépendantes.
5. Donner la loi de U.

$\boxed{3}$ Soient les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}[0, \theta]$.

Soit $\hat{\theta} := (n + 1)X_{(1)}$. Quelle est la loi de $\hat{\theta}$?

L'estimateur $\hat{\theta}$ est-il non biaisé ? consistant ?

$\boxed{4}$ Soit $a > 0$ connu.

Soit le modèle d'échantillonage suivant : $X_1, ..., X_n$ *i.i.d.* de loi $\mathcal{Q}_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ où $\mathcal{Q}_\theta$ est la loi sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$f_\theta(x) = \frac{x^{\frac{1}{\theta}-1}}{\theta a^{\frac{1}{\theta}}}\mathbb{1}_{]0,a[}(x).$$

Le paramètre d'intérêt est θ.

[a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.

[b] Soit $\hat{\theta} := -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i/a)$. Cet estimateur $\hat{\theta}$ est-il biaisé ? Consistant ?

[c] Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}$?

$\boxed{5}$ À partir de deux estimateurs T_1 et T_2 du paramètre θ, sans biais et indépendants, on construit l'estimateur $T_3 = \alpha T_1 + (1-\alpha)T_2$, où $\alpha \in]0,1[$.

Déterminer α, en fonction des variances $V_1 = Var(T_1)$ et $V_2 = Var(T_2)$, de façon que T_3 soit un estimateur sans biais de variance minimale parmi les estimateurs qui sont une combinaison convexe de T_1 et T_2 .