Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2015-2016
Nathalie Krell

Statistiques

Partiel n°2

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

$\boxed{1}$ 1. On considère le 8-échantillon suivant, constitué de tirages suivant une loi normale d'espérance ν et d'écart-type $\sigma = 3$, $\mathcal{N}(\nu, 3^2)$:

14.5 9.3 12.3 10.4 12.9 10.2 13.5 14.2

a)Construire un intervalle de confiance pour ν, au niveau de confiance 99%. Expliquer les étapes de votre démarche.

b) Toujours au niveau de confiance 99%, on souhaite obtenir une marge d'erreur pour ν inférieure ou égale à 0,5 comment choisir la taille n du n-échantillon (on suppose toujours $\sigma = 3$) ?

2. On considère le 8-échantillon suivant, constitué de tirages suivant une loi normale d'espérance ν et d'écart-type σ inconnu, $\mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$:

18.8 11.2 3.4 8.6 17.4 7.7 15.8 12.5

Construire un intervalle de confiance pour ν, au niveau de confiance 99%. Expliquer les étapes de votre démarche.

$\boxed{2}$ On considère le modèle statistique $(\mathbb{R}_+^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n), \mathcal{U}((0,\lambda))^{\otimes n}{}_{\lambda>0})$. Dans la suite, $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim \mathcal{U}((0,\lambda))^{\otimes n}$ et $\alpha > 0$.

[a] Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\lambda}_1$.

[b] En utilisant $\hat{\lambda}_1$, donnez un intervalle de confiance asymptotique pour λ de niveau $1-\alpha$.

[c] Calculer l'espérance de X_1^4 et en déduire un estimateur des moments de λ, noté $\hat{\lambda}_2$.

[d] A partir de $\hat{\lambda}_2$, construire un intervalle de confiance de λ de niveau au moins $1-\alpha$.

[e] A partir de $\hat{\lambda}_2$, construire un intervalle de confiance asymptotique de λ de niveau $1-\alpha$.

[f] Montrer que la v.a. $\frac{\max_{1\le i\le n} X_i}{\lambda}$ est pivotale, i.e. sa loi ne dépend pas de λ. En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre λ au niveau de confiance $1-\alpha$.

[g] A partir de maintenant on va supposer que $\lambda \in [0, M]$, avec $M > 0$. Grâce à cette hypothèse et en utilisant l'inégalité de Hoeffding, donner un intervalle de confiance pour le paramètre λ au niveau de confiance $1-\alpha$.

[h] J'ai simulé grâce à Scilab 100 v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, \lambda]$, noté $X_1, \ldots X_{100}$. Je suppose que $M = 5$ et $\alpha = 0.05$. J'ai trouvé $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i = 1.5$, $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i^2 = 2.92$, $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i^3 = 6.367$, $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i^4 = 14.89$, $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i^8 = 621.3$ et $\max_i X_i = 2.98$. Donner les valeurs des différents intervalles de confiance ? Que pouvez vous en déduire ?

$\boxed{3}$ Nous considérons le modèle de régression linéaire $Y = X\beta + \varepsilon$, où $Y \in \mathbb{R}^n$, X est une matrice de taille $n \times p$ composée de p vecteurs orthogonaux, et $\beta \in \mathbb{R}^p$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$. Considérons Z la matrice des q premières colonnes de X et U la matrice des $(p-q)$ dernières colonnes de X. Nous avons obtenu par la méthode des moindres carrés les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_X &= \hat{\beta}_1^X X_1 + \ldots + \hat{\beta}_p^X X_p \\
\hat{Y}_Z &= \hat{\beta}_1^Z X_1 + \ldots + \hat{\beta}_q^Z X_q \\
\hat{Y}_U &= \hat{\beta}_{q+1}^U X_{q+1} + \ldots + \hat{\beta}_p^U X_p
\end{aligned}$$

Notons également $SCE(A) = ||P_A Y||^2$ avec P_A la matrice de projection orthogonale sur A.

1. Montrer que $SCE(X) = SCE(Z) + SCE(U)$.
2. Donner l'expression de $\hat{\beta}_1^X$ en fonction de Y , X_1 et $||X_1||$.
3. En déduire que $\hat{\beta}_1^X = \hat{\beta}_1^Z$.