

## Fiche de TD n°8 : Chaîne de Markov : mesures invariantes.

[1] **Chaîne à deux états.** Soit  $(X_n, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov Homogène sur  $E = \{0, 1\}$  de matrice de transition  $P = ((P(i, j))_{(i, j) \in E^2}) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$  avec  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ .

- [a] Dessiner son graphe.
- [b] Déterminer sa probabilité stationnaire  $\Pi$ .
- [c] Calculer  $\mathbb{P}_0(T_1 = n)$ ,  $\mathbb{P}_0(T_0 = n)$ .
- [d] Calculer  $P^n$  pour  $n \geq 1$ . Trouver  $A > 0$  et  $\rho \in ]0, 1[$  tels que pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $|P^n(x, y) - \Pi(y)| \leq A\rho^n$ .

[2] **Chaîne d'Ehrenfest.** Soient  $d$  balles ( $d > 1$ ), numérotées de 1 à  $d$  et réparties dans 2 urnes  $A$  et  $B$ . On tire un nombre  $i$  au hasard entre 1 et  $d$ , et la balle numéro  $i$  est changée d'urne. Soit  $X_n$  le nombre de balles dans l'urne  $A$  après  $n$  tirages successifs. La chaîne  $(X_n, n \geq 0)$  est appelée chaîne d'Ehrenfest.

- [a] On admet que  $(X_n, n \geq 0)$  définit une chaîne de Markov. Vérifier qu'elle est homogène et déterminer sa matrice de transition.
- [b] Si  $X_0$  est distribué suivant une loi binomiale de paramètre  $(d, 1/2)$ , déterminer la distribution de  $X_1$ . Que peut-on en dire ?
- [c] Dans cette question et la suivante, on suppose  $d = 3$ . Soit  $T_0$  le nombre de tirage nécessaire pour vider  $A$  (on tire au moins une fois, même si  $A$  est vide au départ). Déterminer pour tout état  $x$  et pour tout  $n = 1, 2$  et  $3$ ,  $\mathbb{P}_x(T_0 = n)$ .
- [d] Calculer  $P$ ,  $P^2$ ,  $P^3$ . Si  $\mu_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  est la loi initiale de la chaîne déterminer les lois de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  de  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ .
- [e] Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y)$ .  
Application :  $d = 4$ ,  $X_0 = 0$ .
- [f] Pour cette question et la suivante, on considère la chaîne d'Ehrenfest modifiée. Lorsque la balle a été extraite d'une urne suivant la procédure décrite, on tire au sort (avec des probabilités égales) l'urne  $A$  ou  $B$  dans laquelle on la place.  
Déterminer la matrice de transition, encore notée  $P$ , et la distribution stationnaire de la chaîne ainsi modifiée.
- [g] Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y)$ .  
Application :  $d = 4$ ,  $X_0 = 0$ .

[3] **Chaîne de naissance et de mort.** On considère  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène d'espace d'état  $E = \mathbb{N}$  et de matrice de transition  $P$  définie par

$$P(x, x-1) = q_x, \quad P(x, x) = r_x, \quad P(x, x+1) = p_x,$$

avec  $p_x + q_x + r_x = 1$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q_x > 0$  si  $x > 0$ , et  $p_x > 0$ . Une telle chaîne est appelée chaîne de naissance et de mort. Le but est d'étudier sous quelle condition cette chaîne est récurrente.

Pour  $i \in E$ , on pose  $\tau_i = \inf\{n \geq 0 \mid X_n = i\}$ . Etant donné trois états  $a$ ,  $x$ , et  $b$  tel que  $a \leq x \leq b$ , on pose  $u(x) = \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b)$  et  $\gamma(x) = \frac{q_1 \dots q_x}{p_1 \dots p_x}$  avec  $\gamma(0) = 1$ . (Observer que  $\tau_i \neq T_i$ .)

- [a] Déterminer une relation entre  $u(x+1) - u(x)$  et  $u(x) - u(x-1)$  pour  $a < x < b$ . Calculer en fonction des  $\gamma(y)$  pour  $a \leq y < b$  la valeur de  $u(a) - u(a+1)$  et en déduire que

$$u(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma(y)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)}$$

pour  $a \leq x \leq b$ . Traiter le cas particulier où  $p_x = q_x$  pour tout  $x > 0$ .

- [b] Déterminer  $\mathbb{P}_1(T_0 = +\infty)$  et montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si  $\sum_{y=0}^{\infty} \gamma(y) = +\infty$ .  
 [c] Déterminer les mesures  $\lambda$  sur  $E$  invariantes par la matrice  $P$  et en déduire que la chaîne est récurrente positive si et seulement si

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} < \infty.$$

- [4] Soit  $(X_n, n \geq 0)$  une chaîne de Markov homogène sur  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  de matrice de transition

$$P = ((P(i, j))_{(i, j) \in E^2}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- [a] Calculer  $U(0, 0)$ , que peut-on en déduire ?  
 [b] Effectuer la classification des états : déterminer les classes de récurrence et les états transitoires. Pour tous les états récurrents  $x$ , il faut démontrer de deux manières différentes qu'ils sont récurrents (dont une en calculant explicitement  $\rho_{xx}$ .)  
 Dessiner son graphe.  
 [c] Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.  
 [d] Calculer les mesures invariantes.