

Fiche de TD n°6 : Chaîne de Markov : propriétés de Markov.

[1] Etude de ρ_{xy} . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P . Soient deux états distincts x et y tels que $\rho_{xy} = \mathbb{P}_x(T_y < \infty) > 0$.

- [a] Montrer que $\rho_{xy} > 0$ ssi il existe $n \geq 1$ tel que $P^n(x, y) > 0$.
- [b] Soit n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que $P^{n_0}(x, y) > 0$, et soient $x_1, \dots, x_{n_0-1}$ des états tels que $P(x, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n_0-1}, y) > 0$. Montrer que les états $x, x_1, \dots, x_{n_0-1}, y$ sont distincts.
- [c] Lorsque E est fini, avec d éléments, montrer que $n_0 \leq d - 1$ et que $\mathbb{P}_x(T_y \leq d - 1) > 0$.

[2] Exemple d'application de la propriété de Markov faible. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P . Montrer les relations suivantes :

- [a] $P^n(x, y) = \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_x(T_y = m) P^{n-m}(y, y)$ pour $n \geq 1$.
- [b] Si a est un état absorbant, $\mathbb{P}_x(X_n = a) = \mathbb{P}_x(T_a \leq n)$ pour $n \geq 1$.
- [c] $\mathbb{P}_x(T_y = n + 1) = \sum_{z \neq y} P(x, z) \mathbb{P}_z(T_y = n)$ pour $n \geq 1$.
- [d] $\rho_{xy} = P(x, y) + \sum_{z \neq y} P(x, z) \rho_{zy}$.

[3] Propriété de Markov simple Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable S , de fonction de transition Q , issue de x sous $\mathbb{P}_x$. Soit F un sous-ensemble non vide de S . On pose $T_F = T_F(X_0, X_1, \dots) = \inf\{n \geq 0 : X_n \in F\}$.

- [a] Montrer que pour toute fonction h positive bornée définie sur F , la fonction g définie par

$$\forall x \in S \quad g(x) = \mathbb{E}_x(h(X_{T_F}) \mathbb{1}_{\{T_F < \infty\}})$$

est solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} g(x) &= Qg(x), \forall x \in F^c \\ g(x) &= h(x), \forall x \in F. \end{aligned}$$

On va montrer que g est la solution positive minimale de ce problème.

- [b] Soit f une autre solution positive de ce problème. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_{n \wedge T_F})).$$

- [c] En déduire que $f \geq g$.

[4] Marche aléatoire symétrique Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. On pose, pour tout n , $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$.

- [a] Montrer, pour $a \in \mathbb{N}$, que $T_a = T_a(S_0, S_1, \dots) = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = a\}$ est fini p.s. (on pourra considérer $a - S_{n \wedge T_a}$).
- [b] Montrer que $(T_{a+1} - T_a)_{a \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d.