Fiche de TD n°5 : Exemples de Chaînes de Markov.

$\boxed{1}$ **Modèle de diffusion d'Ehrenfest.** Soient d balles numérotées de 1 à d réparties dans 2 urnes A et B. On tire un nombre i au hasard entre 1 et d et la balle numéro i est changée d'urne. Soit X_n le nombre de balle dans l'urne A après n tirages indépendants. Alors $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov d'espace d'état $E = \{1, 2, ..., d\}$.

Ecrire la matrice de transition.

$\boxed{2}$ **Marche aléatoire.** Soient X_0, ξ_1, ξ_2,... des v.a. indépendantes à valeurs entières, avec X_0 de loi ν et ξ_1, ξ_2,... de même loi f. Soit $X_n = X_0 + \xi_1 + ... + \xi_n$.

Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov homogène et calculer sa matrice de transition.

$\boxed{3}$ **Bonus/Malus automobile.** Une compagnie d'assurance applique le système de bonus/malus suivant : il propose à ses assurés N tarifs d'assurance $\{1, 2, ..., N\}$. Le tarif 1 est le plus avantageux, le tarif N le moins avantageux. Chaque année, le tarif est révisé de la façon suivante. Supposons que le tarif était i. Si l'automobiliste n'a pas eu d'accident en tort dans l'année, son tarif passe au tarif immédiatement moins cher, c'est à dire $i - 1$, sauf s'il était au tarif 1, auquel cas il y reste. S'il a eu $k \geq 1$ accidents en tort dans l'année il passe au tarif $i + k$, sauf si $i + k \geq N$ auquel cas il passe au tarif N. On suppose que chaque année le nombre d'accident provoqués par l'automobiliste suit une loi de Poisson de paramètre λ (c'est à dire si A est le nombre d'accidents, $\mathbb{P}(A = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$).

Modéliser ce système par une chaîne de Markov.

$\boxed{4}$ **Problème de la ruine du joueur.**

[a] Supposons qu'un joueur partant d'un capital initial de x_0 euros, fasse une série de paris à 1 euro. Soit p la probabilité de gagner et $q = 1 - p$ la pobabilité de perdre à chaque pari. Si par hasard, son capital atteint 0, il est ruiné et ne peut plus jouer : son capital reste nul après. Soit X_n le capital du joueur à l'instant n. Alors $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov d'espace d'état $E = \mathbb{N}$; écrire sa matrice de transition.

[b] Supposons que, si le capital atteint d, le joueur s'arrête de jouer. Ecrire la nouvelle matrice de transition.

$\boxed{5}$ Soit X_0 une variable aléatoire, à valeurs dans un ensemble E fini ou dénombrable, de loi ν. Soit une suite $(U_n, n \geq 0)$ de variables aléatoires indépendantes de X_0 et indépendantes entre elles, à valeurs dans un ensemble dénombrables F, de même loi $\mu = (\mu_i)_{i\in F}$; enfin, soit f une fonction $f : E \times F \to E$ et soit $(X_n, n \geq 0)$ la suite de variables aléatoires définie par $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$, $n \geq 0$.

[a] Montrer que U_{n+1} est indépendante de $X_1, ..., X_n$.

[b] Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov Homogène de matrice de transition $P = ((P(i,j))_{(i,j)\in E^2}) = ((\sum_{k\in F/f(i,k)=j} \mu_k)_{(i,j)\in E^2})$

$\boxed{6}$ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Montrer que la suite $(X_{kn}, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov et écrire sa matrice de transition.

$\boxed{7}$ **Bruit qui court.** Un message pouvant prendre deux formes ("oui" et "non") est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme avec probabilité $1-p$. Les intermédiaires sont indépendants.

Modéliser cette situation par une chaîne de Markov homogène à deux états et calculer la probabilité que l'informations transmise par le n-ième intermédiaires soit conforme à l'information initiale. Est-ce que la réponse dépend du choix de la loi initiale ? Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$.

$\boxed{8}$ **File d'attente.** On étudie une file d'attente à un guichet en prenant comme unité de temps le service d'un client (chaque client requiert le même temps de service par hypothèse). On note ξ_n le nombre de clients arrivant pendant la n-ième période de temps et on suppose ξ_1, ξ_2,...indépendantes, équidistribuées de loi μ. Soit X_0 le nombre initial de clients indépendants de $(\xi_n, n \geq 0)$ et X_n le nombre de clients après n périodes. Expliquer pourquoi on a :

$$X_{n+1} = X_n - 1_{\{X_n \geq 1\}} + \xi_{n+1}$$

[a] Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov homogène et calculer sa matrice de transition.

[b] On suppose que s'il y a un ou plusieurs clients qui attendent en début de période, avec probabilité p un client est servi, avec probabilité $1-p$ aucun client n'est servi durant cette période. Déterminer la marice de transition de la chaîne ainsi modifiée.

$\boxed{9}$ **La pluie et le beau temps.** On suppose que le temps qu'il fait dépend du temps qu'il a fait les deux jours précédents. On suppose que

$\mathbb{P}(\texttt{il pleut demain} \mid \texttt{il a plu hier et aujourd'hui}) = 0.7$
$\mathbb{P}(\texttt{il pleut demain} \mid \texttt{il a plu hier mais pas aujourd'hui}) = 0.4$
$\mathbb{P}(\texttt{il pleut demain} \mid \texttt{il a plu aujourd'hui mais pas hier}) = 0.5$
$\mathbb{P}(\texttt{il pleut demain} \mid \texttt{il a plu ni hier ni aujourd'hui}) = 0.2.$

[a] Montrer que l'on peut modéliser ceci par une chaîne de Markov, dont on précisera les états.

[b] Dessiner le diagramme de transition et donner la matrice de transition.

[c] Quelle est la probabilité qu'il pleuve mercredi et jeudi sachant qu'il a plu lundi et mardi ?

[d] Quelle est la probabilité qu'il pleuve jeudi sachant qu'il a plu lundi et mardi ?

$\boxed{10}$ Le chauffage d'une maison individuelle est composé d'un chauffage de base et d'un chauffage d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 2 si les deux chauffages fonctionnent.

Si un jour on est dans l'état 1, on estime que le lendemain on est encore dans l'état 1 avec une probabilté 1/2. Si on est dans l'état 2, le lendemain la maison sera chaude et on pourra passer à l'état 1 avec probabilité 3/4. Soit X_n l'état du système au jour n. $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov.

[a] Déterminer la matrice de transition P.

[b] Soit $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1), n \geq 0$. Déterminer une relation de recurrence entre p_n et p_{n+1}.

[c] Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.

[d] Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec probabilité 3/5, alors tous les jours, on a encore une probabilité 3/5 d'être dans l'état 1.

[e] Chaque journée dans l'état 1 coûte 2 euros, dans l'état 2 coûte 4 euros et chaque transition de 1 à 2 ou de 2 à 1 coûte 1 euro. Calculer le coût moyen dans la situation précédente.

$\boxed{11}$ **Chaîne de Markov à deux états.** On considère une machine qui, en début de journée, peut être en état de marche : état 1, ou en état de panne : état 0. On suppose que, si la machine est en panne au début du $n$ème jour, elle a une proba p d'être en état de marche au début du $n+1$ème jour, si la machine est en état de marche au début du $n$ème jour, elle a une proba q d'être en panne au début du $n+1$ème jour. On note X_n la variable aléatoire égale à l'état de la machine au $n$ème jour. $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov. On suppose que : $\mathbb{P}(X_0 = 0) = \nu(0)$ et $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \nu(1) = 1 - \nu(0)$

[a] Déterminer la matrice de transition P.

[b] Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 0 / X_0 = 0, X_2 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$.

[c] Montrer que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = (1 - p - q)\mathbb{P}(X_n = 0) + q$. En déduire, par récurrence sur n, $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

Que se passe-t-il lorsque $p = q = 0$?

[d] On suppose que $0 < p, q < 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{q}{p+q}$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{p}{p+q}$. Que se passe-t-il lorsque $\nu(0) = \frac{q}{p+q}$?

[e] Calculer P^n.

$\boxed{12}$ **Loi du temps de séjour en un état.** Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov d'espace d'état $E = \mathbb{N}$. On appelle temps de séjour dans l'état $x \in E$ la v.a. $\tau_x = \inf\{n \in \mathbb{N} | X_n \neq x\}$ (avec la convention $\inf \emptyset = \infty$). Calculer la loi de τ_x sous $\mathbb{P}_x$.