CC1 de Martingales et Chaînes de Markov

Master 1 Mathématiques
UFR Mathématiques
Université Rennes 1

Février 2010

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire exponentielle avec loi $e^{-x}dx$ sur $\mathbb{R}_+$. Si $x > 0$ on note $[x]$ la partie entière et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x:

$$[x] \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad [x] \leq x < [x] + 1, \quad \{x\} = x - [x] \in [0, 1[.$$

On note $Y := [X], \quad Z := \{X\}$. Remarquer que $X = Y + Z$.

a) Calculer la loi du couple $(Y, Z) \in \mathbb{N} \times [0, 1[$. Montrer que les variables Y et Z sont indépendantes.

b) Déterminer les espérances conditionnelles:

$$\mathbb{E}[Y|Z], \quad \mathbb{E}[Z|Y], \quad \mathbb{E}[Y|X], \quad \mathbb{E}[Z|X], \quad \mathbb{E}[X|Y], \quad \mathbb{E}[X|Z].$$

Exercice 2. Soit (U, V) un vecteur gaussien centré, et

$$Var(U) = Var(V) = 1, \quad \mathbb{E}[UV] = \rho,$$

où $\rho \in]-1, 1[$.

a) Calculer l'espérance conditionelle $\mathbb{E}[V|U]$.

b) Expliciter la densité de la loi conditionnelle de V sachant U.

Exercice 3 Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$: $S_0 = 0$, $S_n = U_1 + \cdots + U_n$, où les v.a. U_i sont indépendantes et de même loi et telles que $0 < \mathbb{P}(U_i = 1) = p < 1$, $\mathbb{P}(U_i = -1) = 1 - p = q$.

a) Soit $Z_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive.

b) Déduire d'une inégalité maximale appliquée à la martingale $(Z_n)_{n\geq 0}$ que

$$\mathbb{P}(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k) \leq (\frac{p}{q})^k$$

et que, lorsque $q > p$,

$$\mathbb{E}(\sup_{n\geq 0} S_n) \leq \frac{p}{q - p}.$$