Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2011-2012
Nathalie Krell



# Examen

Une attention particulière sera portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

## $\boxed{1}$ **Densité et espérance conditionnelle** (5 points)

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, admettant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2}\mathbb{1}_{\{]1,\infty[\}}(z)$. On pose $U = XY$ et $V = X/Y$. Quelle est la loi de $(U, V)$ ? En déduire la densité conditionnelle de $V$ sachant $U$ et l'espérance $\mathbb{E}(V|U)$.

## $\boxed{2}$ **Étude d'une chaîne de Markov** (5 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de matrice de transition

$$P = ((P(i,j))_{(i,j)\in E^2}) = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

[a] (1pt) Effectuer la classification des états : déterminer les classes de récurrence et les états transitoires. La chaîne est-elle irréductible ?

[b] (1pt) On restreint la chaîne de Markov aux états $\{4, 5\}$, la chaîne est-elle irréductible ? Apériodique ?

[c] (1,5pt) On revient à la chaîne entière pour cette question et la suivante. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.

[d] (1,5pt) Déterminer les probabilités invariantes.

## $\boxed{3}$ **Temps d'atteinte via les martingales et les chaînes de Markov** (10 points)

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0, 1[$ *i.e.* telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - p$. On pose $X_0 := 0$ et $X_n := Y_1 + \ldots + Y_n$ pour $n \geq 1$. On remarquera que contrairement au cas de la ruine du joueur, on a ici $X_{n+1} \geq X_n$ *p.s.* pour tout $n \geq 0$. À tout entier $y \in \mathbb{N}$, on associe le temps d'arrêt $T_y := \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$, avec la convention $\inf \emptyset := +\infty$.

[a] (1,5pt) Montrer, que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_n = +\infty$ *p.s.* et en déduire que $\mathbb{P}(T_y < \infty) = 1$ pour tout $y \in \mathbb{N}$.

[b] (1pt) Montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1} := (X_n - np)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1} = (\sigma(X_1, \ldots, X_n))_{n\geq 1}$.

[c] (2pt) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T_y)$ en utilisant la martingale arrêtée $(M_{n\wedge T_y})_{n\geq 1}$.

[d] (1,5pt) Soit $N_y := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = y\}}$ le nombre de visites de $(X_n)_{n\geq 1}$ à $y \in \mathbb{N}$. Trouver une relation simple reliant $N_y$, $T_{y+1}$ et $T_y$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(N_y)$.

On remarque que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov homogène avec matrice de transition $Q$ donnée par : $Q(x, x) = 1 - p$, $Q(x, x + 1) = p$, $x \in \mathbb{N}$ (on ne demande pas de le prouver). On pourra supposer que la chaîne $(X_n)_{n\geq 1}$ est donnée sous forme canonique.

[e] (1,5pt) Déterminer la loi de $X_n$ et la loi de $T_1$.

[f] (1,5pt) Prouver, à l'aide de la propriété de Markov forte et du point [d], que $N_y$ a même loi que $T_1$.

[g] (1pt) Déterminer la loi de $T_y$.