Examen

Une attention particulière sera être portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

$\boxed{1}$ **Calcul d'espérance conditionnelle : cas discret et à densité.** On se donne deux réels a et b strictement positifs, et (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} e^{-(a+b)y} dy.$$

On rappelle la formule suivante (qui se démontre facilement par récurrence) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!.$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mesurable et tout $n \in \mathbb{N}$, puis $\mathbb{E}[Y/(X+1)]$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=n\}}|Y)$ (pour cela il pourra être utile de calculer la densité de Y) et enfin $\mathbb{E}(X|Y)$.

$\boxed{2}$ **L'urne de Polya.**

A l'instant 1, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 2. On répète ce procédé. Pour $n \geq 1$, on note Y_n et

$$X_n = \frac{Y_n}{N_0 + n - 1}$$

respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$.

[a] Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge *p.s.* vers une variable aléatoire, que l'on note U , et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(U_k)$.

[b] Cas $a = b = 1$: Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de U .

[c] Cas général : On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n + 1)...(Y_n + k - 1)}{(n + N_0 - 1)(n + N_0)...(n + N_0 + k - 2)}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(U^k)$.

[d] Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). En déduire qu'on a caractérisé la loi de U . Remarque : Cette loi est la loi $\beta(a, b)$ de densité

$$B(a, b)^{-1} u^{a-1} (1 - u)^{b-1} \mathbb{1}_{\{[0,1]\}}(u)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue (cette loi étant elle aussi caractérisée par ses moments d'après 3., il suffit de vérifier que les moments de la loi $\beta(a, b)$ sont les mêmes que ceux de la loi de U).

$\boxed{3}$ Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ de matrice de transition

$$P = ((P(i,j))_{(i,j)\in E^2}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[a] Effectuer la classification des états : déterminer les classes de récurrence et les états transitoires.

[b] Calculer la loi de T_0 sous $\mathbb{P}_0$. Calculer $\mathbb{P}_2(T_2 < 4)$. Calculer $\mathbb{P}_0(T_0 < \infty)$ et $\mathbb{P}_2(T_2 < \infty)$. Que peut-on en déduire ?

[c] Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.

[d] Calculer les probabilités invariantes.

$\boxed{4}$ **Questions ouvertes (hors barême) :**

[a] Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale. Soit f une fonction mesurable. Que peut-on dire de $(f(M_n))_{n\geq 0}$? Si besoin vous pourrez faire une discussion suivant les propriétés de f.

[b] Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov. Soit f une fonction mesurable. Que peut-on dire de $(f(X_n))_{n\geq 0}$? Si besoin vous pourrez faire une discussion suivant les propriétés de f.