Examen

Une attention particulière sera être portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

[1] Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard et soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration canonique de B . On définit $d_1 = \inf\{t \geq 1 | B_t = 0\}$ et $g_1 = \sup\{t \leq 1 | B_t = 0\}$. Soit $t \geq 1$.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(d_1 \leq t) = \mathbb{E}(g(B_1))$$

avec pour $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) := \mathbb{P}(\exists s \in [0, t-1] : \tilde{B}_s = -x)$$

avec $\tilde{B}$ un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_1$.

2. Montrer que

$$g(x) = \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0, t-1]} \tilde{B}_s \geq |x|\right)$$

3. Montrer que

$$g(x) = \mathbb{P}(\sqrt{t-1}|N'| \geq |x|)$$

avec N' une v.a. gaussienne centrée réduite indépendant de $\mathcal{F}_1$.

4. Montrer que d_1 a même loi que $1 + (\frac{N}{N'})^2$ avec N et N' deux v.a. gaussiennes centrées réduites et indépendantes.
5. Calculer la densité de d_1 par rapport à la mesure de Lebesgue.
6. Montrer que $g_1 = d_1^{-1}$ en loi. En déduire la densité de la loi g_1 (la loi de g_1 s'appelle la loi de l'arcsinus).

[2] Soit $(B_t^{(1)})_{t \geq 0}$ et $(B_t^{(2)})_{t \geq 0}$ deux mouvements Browniens standard indépendants. On dénote par $\mathcal{F}_t$ la filtration engendrée par $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus dans $\mathbb{C}$ donnée par

$$X_t = i + B_t^{(1)} + iB_t^{(2)}.$$

Soit

$$\tau = \inf\{t > 0 | X_t \in \mathbb{R}\} = \inf\{t > 0 | 1 + B_t^{(2)} = 0\}.$$

On va donner deux démonstrations différentes de la loi de X_τ .

- Approche martingale.
 - Montrer que $Y_t = e^{i\lambda X_t}$ est une martingale pour tout $\lambda \geq 0$.
 - Calculer $\mathbb{E}(e^{i\lambda X_t})$ pour tout $\lambda \geq 0$, puis pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - En déduire la loi de X_τ .
- Approche principe de réflexion.
 - Déterminer la densité de $B_t^{(1)}$.
 - En utilisant le principe de réflexion, calculer $\mathbb{P}(\tau < t)$ et en déduire la densité de τ . La propriété d'échelle du brownien permet de simplifier les calculs.
 - En déduire la loi de $X_\tau = B_\tau^{(1)}$.

3] Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, on définit le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ par

$$X_t = \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{2s} dB_s$$

1. Montrer que ce processus est gaussien. Calculer sa variance et sa covariance.
2. Montrer que X est un mouvement Brownien.

4] Soit M une martingale locale. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ on définit le processus

$$N_t := e^{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle_t}.$$

Montrer que N est une martingale locale.

5] Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, parmi les processus suivants quels sont ceux qui sont des martingales (on pourra utiliser sans démonstration que $\mathbb{E}(\int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s) = \int_0^t \mathbb{E}(B_u | \mathcal{F}_s) du$.)

1.

$$M_t = B_t^3 - 3 \int_0^t B_s ds;$$

2.

$$X_t = tB_t - \int_0^t B_s ds.$$

6] On admet que le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t Y_s dB_s \\ Y_t = y - \int_0^t X_s dB_s \end{cases}$$

avec x, y deux réels. Que vaut $X_t^2 + Y_t^2$?