# Examen

Une attention particulière sera être portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

$\boxed{1}$ Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

[a] En utilisant la formule d'Itô, écrire la décomposition de semimartingale de $B^2$. Que peut-on dire de la partie martingale locale ?

[b] Calculer le crochet de $B$ et de $B^2$.

[c] On note $A_t = \int_0^t B_s ds$. S'agit-il d'une martingale ? D'un processus à variations finies ?

[d] Montrer que $A_t$ suit une loi normale que l'on précisera.

[e] Calculer la covariance $Cov(A_t, A_s)$ avec s$< t$.

$\boxed{2}$ Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Soit

$$Y_t = \sin(B_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_s)ds.$$

Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
Calculer son espérance et sa variance.

$\boxed{3}$ **Un exemple surprenant.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

[a] Montrer que

$$Z_t = B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} ds$$

est un processus gaussien.

[b] Calculer sa variance et sa covariance.

[c] En déduire que $Z$ est un mouvement Brownien.

[d] Montrer que $Z$ n'est pas une $\mathcal{F}^B$-martingale, où $\mathcal{F}^B$ est la filration naturelle de $B$.

$\boxed{4}$ **Loi d'un temps d'atteinte pour le mouvement brownien**

Soit $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien standard. Pour tout $a > 0$ on définit $T_a = \inf\{t > 0, B_t \geq a\}$ et $\overline{T}_a = \inf\{t > 0, |B_t| \geq a\}$

[a] Montrer que $T_a$ et $\overline{T}_a$ sont des temps d'arrêt.

[b] Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda B_{T_a\wedge n} - \frac{\lambda^2}{2}(T_a\wedge n)}) = 1$$

[c] En déduire que la transformée de Laplace de $T_a$ vaut

$$\mathbb{E}(e^{-\nu T_a}) = e^{-a\sqrt{2\nu}}, \;\; \nu > 0$$

et que $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.

[d] Pour $\nu > 0$, montrer que l'application $F_\nu : I\!\!R^* \to I\!\!R$ défnie par :

$$F_\nu(a) = \int_0^\infty e^{-\nu x} e^{-\frac{a^2}{2x}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi x}}$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

[e] Montrer que pour tout $a \in I\!\!R^*$, on a l'égalité :

$$\nu F_\nu(a) = \sqrt{\frac{\nu}{2}} e^{-|a|\sqrt{2\nu}}.$$

[f] Donner la densité de $T_a$.

[g] Montrer que :

$$p.s. \ \limsup_{t\to\infty} B_t = \infty \ \text{ et } \ \liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty.$$

et que ceci entraîne pour tout $x \in I\!\!R$, l'ensemble $\{t > 0, \ B_t = x\}$ est non borné.

[h] Montrer que la transformée de Laplace de $\overline{T}_a$ vaut :

$$\mathbb{E}(e^{-\nu \overline{T}_a}) = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\nu})}, \ \ \nu > 0$$