Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2015-2016
Nathalie Krell

Examen

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Soit $c > 0$ et $b > 0$. Rappel la loi fonction gamma $\Gamma(c, b)$ admet pour densité

$$x \to \frac{b}{\Gamma(c)}(bx)^{c-1}e^{-bx}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x),$$

pour fonction caractéristique,

$$x \to \left(\frac{b}{b-it}\right)^c,$$

pour moyenne c/b et pour variance c/b^2.

$\boxed{1}$ Soit $Y_1, ..., Y_n$ *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n Y_i$?

$\boxed{2}$ Soit le modèle d'échantillonage suivant : $X_1, ..., X_n$ *i.i.d.* de loi $\mathcal{Q}_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ où $\mathcal{Q}_\theta$ est la loi sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$f_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x).$$

Le paramètre d'intérêt est θ.

[a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.

[b] Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}_1$.

[c] Quelle est la loi de X_i^2 ?

[d] Quelle est la moyenne de $\hat{\theta}_1$? En déduire un estimateur $\hat{\theta}_2$ de θ non biaisé. Quelle est la variance de $\hat{\theta}_2$? Est-il convergent ?

[e] Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_2$?

[f] Soit $\alpha \in (0, 1)$. En déduire un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1 - \alpha$ pour θ.

$\boxed{3}$ Nous disposons d'une pièce de monnaie et nous intéressons au problème de test suivant, en notant la probabilité d'apparition de pile p ? Pour $p_0 < p_1$, on veut tester $\mathcal{H}_0 : p = p_0$ vs. $\mathcal{H}_1 : p = p_1$.

Nous disposons pour cela d'un ensemble de n observations $X_1, ..., X_n$.

i) Déterminez le test ayant la puissance maximale parmi la classe des tests de niveau α.

ii) Sachant que, pour $X \sim Bin(10, 1/2)$, on a $\mathbb{P}(X \leq 7) = 0,95$ et $\mathbb{P}(X \leq 8) = 0,99$, déterminez le test d'hypothèse dans le cas $p_0 = 1/2$, $n = 10$ et $\alpha = 0,05$.

$\boxed{4}$ Dans le but de tester l'influence de l'heure de prise sur l'efficacité d'un médicament, on a effectué une enquête sur un échantillon de 600 malades d'un hôpital. A chaque patient on a demandé de choisir le moment de la prise du médicament. La variable moment de prise du médicament a 3 modalités (matin, après-midi, soir). Sur 216 malades ayant pris le médicament le matin on a observé 141 guérisons. Sur 176 malades ayant pris le médicament l'après-midi on a observé 125 guérisons. Sachant qu'on a observé en tout

420 cas de guérison dans cet échantillon, peut-on dire, au seuil de 5% qu'il existe un lien entre le moment de la journée auquel ce médicament est administré et son efficacité ?

$\boxed{5}$ Modèle linéaire gaussien. Pour une population d'individus actifs donnée, on souhaite analyser la différence de revenus selon le sexe. À cet effet, on suppose que le revenu R_i de l'individu i s'écrit

$$R_i = \mu + \beta s_i + \varepsilon_i,$$

où s_i est une variable déterministe égale à 1 si l'individu i est un homme et 0 s'il s'agit d'une femme et les variables aléatoires $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi gaussienne centrée de variance connue σ^2. Le couple $\theta = (\mu, \beta)$ constitue le paramètre inconnu. On observe le n-uplet de revenus $(R_1, \ldots, R_n)$ auquel est associé le n-uplet $(s_1, \ldots, s_n)$ des sexes des individus échantillonnés.

[a] Comment s'interprètent les coefficients μ et β ?

[b] Déterminer la log-vraisemblance du modèle. À quelle condition sur les $(s_i)_{1\leq i\leq n}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\beta})$ est-il bien défini ?

[c] Exprimer, en fonction de σ^2 et de $(s_i)_{1\leq i\leq n}$, la loi de $\hat{\beta} - \beta$.

[d] Donner la forme d'une région de rejet pour le test $\beta = 0$ contre $\beta \neq 0$. En supposant que l'erreur de première espèce soit fixée à α, calculer la fonction puissance de ce test.

[e] Montrer que pour tout μ et tout c fixés, la probabilité $P_\theta(\hat{\beta} > c)$ est une fonction croissante de β. En déduire un test pour le problème de test $H_0 : \beta \leq 0$ contre $H_1 : \beta > 0$.