

Examen

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une réponse oui ou non ne sera pas suffisante afin d'avoir les points.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Si à un moment donné vous n'arrivez pas à mener à bien un calcul, n'hésitez pas à faire les questions suivantes en utilisant les théorèmes et propositions du cours.

[1] Soit le modèle d'échantillonnage suivant : X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi \mathcal{Q}_θ , $\theta > 0$ où \mathcal{Q}_θ est la loi sur \mathbb{R} de densité

$$f_\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} x^2 e^{-x^2/\theta}.$$

Le paramètre d'intérêt est θ .

- [a] Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.
- [b] Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}_1$.
- [c] L'estimateur $\hat{\theta}_1$ est-il biaisé ?
- [d] Est ce que $\hat{\theta}_2 := \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ est consistant ?
- [e] Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_2$? Pensez à bien justifier.
- [f] En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau 0,95 pour θ .

[2] Soit $\theta > 0$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires iid de loi uniforme sur $[0, \theta]$. Nous voulons tester l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0 : \theta = 3$ contre l'hypothèse $\mathcal{H}_1 : \theta < 3$. Considérons la collection C_1 des procédures de test qui consistent à rejeter \mathcal{H}_0 si et seulement si $\max(X_1, X_2) < c$, pour un certain c fixé dans $]0, 1[$.

- i) Déterminer, dans C_1 , le test dont l'erreur de première espèce vaut exactement 0,05.
- ii) Calculez la fonction de puissance de ce test.

[3] La presse affirme que parmi les Français regardant la télévision plus de 4 heures par jour, on a la même proportion de personnes dans chaque tranche d'âge (les tranches d'âge correspondent à celles définies dans le tableau suivant).

Sur un échantillon de 30 personnes regardant la télévision plus de 4 heures par jour par on a observé les données suivantes :

Age	Effectif
Moins de 20 ans	11
De 21 à 35 ans	4
De 36 à 50 ans	5
Plus de 51 ans	10

- a) Quels sont les hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 d'après vous ?
- b) Que penser de cette affirmation de la presse au seuil de 5% ?
- c) Que penser de l'opinion selon laquelle un quart des Français regardant la télévision plus de 4 heures par jour a moins de 20 ans, au seuil de 5% ?

[4] Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n -échantillon d'une loi géométrique de paramètre $\lambda > 0$, noté $\mathcal{G}(\lambda)$. On souhaite tester $\mathcal{H}_0 : \lambda = 1/2$ vs. $\mathcal{H}_1 : \lambda = 1$. Question ouverte : Que proposez vous de faire ? Vous pouvez proposer différentes méthodes et bien sur les faire...