Devoir à la maison

Une attention particulière sera être portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié. Le devoir est à rendre pour le 4 mars dernier délais.

$\boxed{1}$ **Théorème de Rademacher** : dans cet exercice, on montre par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \text{ et } Z_n = 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)).$$

[a] Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_n) = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$$

et

$$\sigma(X) = \cap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(X_n, X_{n+1}, ...).$$

[b] Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).

[c] Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z , limite *p.s.* et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée telle que $Z = g(X)$.

[d] Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire que *p.s.* :

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du.$$

[e] Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.

$\boxed{2}$ **Processus de Poisson.** Soit $(W_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de v.a. positives telle que $W_0 = 0$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a. $T_n = W_n - W_{n-1}$. On suppose que les v.a. $(T_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$. Soit $X_0 = 0$ et pour $t > 0$,

$$X_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{W_n \leq t\}}.$$

La famille de v.a. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^*}$ est appelée processus de Poisson d'intensité λ.

[a] Calculer, pour tout $x \geq 1$ et toute famille $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ de fonctions mesurables positives bornées sur $\mathbb{R}$, la quantité

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_t=n\}} \prod_{j=1}^{n} f_j(W_j)\right).$$

En déduire la loi de X_t et la loi conditionnelle de $(W_1, W_2, ..., W_n)$ sachant $(X_t = n)$.

[b] Soient $t > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et une suite finie quelconque de réels tels que $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k = t$. Déterminer la loi de $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$ et justifier l'indépendance des v.a. $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$.

On dit que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^*}$ est à accroissement indépendants.

Soient $0 \leq s < t$. Quelle est la loi de $X_t - X_s$? En déduire $\mathbb{E}(X_t - X_s)$.

[c] Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq k \leq n$. Déterminer une loi conditionnelle de W_k sachant $X_t = n$, l'identifier.