Devoir maison

Une attention particulière sera être portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

$\boxed{1}$ **Convergence en loi.**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. On pose $S_1 = \sup_{t\in[0,1]} B_t$. Montrer que la convergence suivante a lieu en loi :

$$\left(\int_0^t e^{B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\to} e^{S_1}$$

Indication : on pourra penser à introduire pour $\omega \in \Omega$, $T(\omega) \in [0,1]$ tel que $B_{T(w)}(\omega) = S_1(\omega)$.

$\boxed{2}$ **Inégalité de Wald.**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et T un t.a. tel que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

[a] Montrer que $M := \sum_{k=1}^{[T]} \sup_{0\leq t\leq 1} |B_{t+k} - B_k| \in \mathsf{L}^1$.

[b] Que peut-on dire de $(B_{t\wedge T}, t \geq 0)$?

[c] Montrer que $\mathbb{E}(B_T) = 0$.

[d] Soit $T_n = \inf\{t \geq 0 : \ B_t = n\}$.
Que peut-on dire de $(B^2_{t\wedge T_n\wedge T} - t\wedge T_n \wedge T, \ t \geq 0)$?

[e] Soit S un t.a. tel que $S \leq T$. Montrer $\mathbb{E}(B_T^2) \leq \mathbb{E}(B_S^2)$.

[f] Conclure que $\mathbb{E}(B_T^2) = \mathbb{E}(T)$.

Définition : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale. $(X_n)_{n\geq 0}$ est appelée "binard splitting" si conditionnement au passé elle ne prend que deux valeurs c'est à dire

$$|\{X_{n+1}(w) : \ (X_0, ..., X_n)(w) = (x_0, ...x_n)\} \leq 2$$

$\boxed{3}$ Soit X une v.a. telle que $Var(X) < \infty$.

On défini $(X_n)_{n\geq 0}$ tel que

$$\begin{cases} X_0 &= \mathbb{E}(X) \\ \zeta_0 &= 1 \text{ si } X \geq X_0 \quad = -1 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

et pour $n \geq 1$

$$\begin{cases} \mathcal{G} &= \sigma(\zeta_0, ...\zeta_{n-1}) \\ X_n &= \mathbb{E}(X|\,\mathcal{G}_n) \\ \zeta_n &= 1 \text{ si } X \geq X_n \quad = -1 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

[a] Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une "binard spliting" martingale.

[b] Montrer que X_n converge vers X.

$\boxed{4}$ **Skorokhod's embedding.**

Pensez à utiliser les 2 exercices précédents.

Théorème : Soit X une v.a. centrée telle que $Var(X) = 1$ alors il existe un t.a. T tel que $\mathbb{E}(T) = 1$ et $B_T \overset{loi}{=} X$.

[a] Montrer qu'il existe $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale convergente vers X dans L^2 et p.s. tel que le support de X_n est $\{a_n, b_n\} = f^n(X_0, ...X_{n-1})$.

[b] On définit par récurrence $T_0 = 0$ et $T_n = \inf\{t \geq T_{n-1} \;\; B_t \in f^n(B_{T_0}, ..., B_{T_{n-1}})\}$.
Que peut-on dire des lois de $(B_{T_n})_{n\geq 0}$ et $(X_n)_{n\geq 0}$?

[c] Soit $T = \lim_n T_n$. Montrer que T est un t.a.
Que vaut $\mathbb{E}(T)$?

[d] Démontrer le théorème.