Uniquement les calculatrices non scientifiques sont autorisées et une feuille recto-verso de notes

Durée : 1 heure

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une formule ne sera pas suffisante pour avoir les points.

Exercice 1

Pour un projet de construction d'un immeuble de 20 logements, on étudie la capacité nécessaire du parking. On note X la variable "nombre de voitures d'un ménage". Pour tout ménage on admet que la probabilité d'avoir une voiture est 0,70 et celle d'avoir 2 voitures est de 0,30 (on néglige toute autre possibilité). On supposera l'indépendance du nombre de voitures entre les ménages.
1) On pose $Y = X - 1$. Quelle est la loi de Y ?
2) Quelle est la loi de la somme de 20 variables i.i.d. de même loi que Y ? En déduire la probabilité qu'un parking de 29 places soit suffisant pour les 20 ménages. On donnera une réponse sous la forme de sommes et de produits de nombres réels, on n'aura pas besoin de faire le caclul explicite.

Exercice 2

Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on note Q_θ la loi sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$f(x) = \theta e^{-x\theta} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

On observe un n-échantillon de loi Q_θ.
1. Écrire le modèle statistique correspondant.
2. Est ce que le modéle est dominé ? Identifiable ?
3. Calculer l'espérance d'une v.a de loi Q_θ. Proposez un estimateur par la méthode des moments.
4. Soit $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$. Montrer que $\hat{\theta}$ est un estimateur consistant.
5. Montrer que $\hat{\theta}$ est un estimateur asymptotiquement normal c'est à dire qu'il existe $\sigma^2 > 0$ tel que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

et déterminer $\sigma^2 > 0$.

Exercice 3

Rappel : Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne d'espérance 0 et de variance 1. $\mathbb{E}(X^4) = 3$.

Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on note Q_θ la loi $\mathcal{N}(0, \theta)$ normal d'espérance 0 et de variance θ, où θ est un paramètre réel positif strictement positif. On observe un n-échantillon de loi Q_θ.
1. Écrire le modèle statistique correspondant.
2. Calculer le maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}^{MV}$ de θ.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $\hat{\theta}^{MV}$. Que peut-on conclure ?
4. On suppose que le modèle vérifie les hypothèses afin de pouvoir appliquer les résultats sur l'information de Fisher. Calculer la quantité d'information de Fisher. En déduire que $\hat{\theta}^{MV}$ est efficace.