

Examen .

Uniquement la feuille bleue est autorisée.

Durée : 2 heure

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une formule ne sera pas suffisante pour avoir les points.

Exercice 1

Pour cet exercice on doit donner la valeur exacte pour chacune des réponses sauf pour le coefficient de corrélation que l'on pourra laisser sous la forme d'addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée de nombres réels.

Une étudiante en sociologie veut analyser, dans le cadre d'un mémoire de Master, s'il existe une relation linéaire entre le nombre d'heures passées à faire du sport sur une semaine et le poids de la personne. Pour la i -ème personne interrogée, on note x_i le nombre d'heures passées à faire du sport par semaine et y_i le poids de la personne. Elle a interrogé 10000 personnes et l'on obtient les sommes suivantes :

$$\frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} x_i = 3 \text{ et } \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} x_i^2 = 13, \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} y_i = 75 \text{ et } \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} y_i^2 = 7000 \text{ et } \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} y_i x_i = 250.$$

- Identifier la variable à expliquer et la variable explicative. Pour chaque variable calculer la moyenne observée et la variance observée. Donner également la valeur de la covariance et du coefficient de corrélation. Commenter.
- Ecrire l'équation de la droite de régression obtenue en utilisant les valeurs estimées des coefficients a et b .
- Estimer le poids le plus plausible pour une personne sachant qu'elle fait 3 heures de sport par semaine.

Exercice 2

Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point d'accès local, qui dessert 7500 abonnés. A un instant donné t , chaque abonné a une probabilité égale à p d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t .

- Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type?
- Le fournisseur d'accès souhaite savoir que vaut la probabilité p , donner un intervalle de confiance asymptotique pour p , de niveau de confiance $1 - \alpha$.
- Applications numériques pour le calcul de l'intervalle de confiance asymptotique pour p , de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour une observation de 2500 abonnés connectés à un instant t et pour $1 - \alpha = 91\%, 95\%, 99\%$. La réponse sera sous la forme d'addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée de nombres réels.

Exercice 3

Rappel : Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne d'espérance 0 et de variance 1. $\mathbb{E}(X^4) = 3$.

Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on note Q_θ la loi $\mathcal{N}(0, \theta)$ normale d'espérance 0 et de variance θ , où θ est un paramètre réel positif strictement positif.

On considère (Y_1, \dots, Y_n) un n -échantillon de loi Q_θ .

- Écrire le modèle statistique correspondant.

2. Le modèle est-il identifiable ?
3. Calculer le maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}^{MV}$ de θ .
4. Quel vaut $\mathbb{E}(Y_1^4)$?
5. Soit $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2$ Calculer l'espérance mathématique et la variance de $\hat{\theta}$.
6. Quel est la vitesse de $\hat{\theta}$?
7. Donner un intervalle de confiance asymptotique à 90 pourcent de θ . Avec les valeurs numériques : $n = 200$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0.8$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^4 = 1$. La réponse sera sous la forme d'addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée de nombres réels.
8. On suppose que le modèle vérifie les hypothèses afin de pouvoir appliquer les résultats sur l'information de Fisher. Calculer la quantité d'information de Fisher. Est-ce que $\hat{\theta}$ est efficace ?

Exercice 4 On s'intéresse aux salaires des employés d'une entreprise de masques FFP2.

montant du salaire	[0,1000[[1000,1500[[1500,2000[[2000,3000[
nombre de salariés	10	18	14	8

On fait l'hypothèse que les données sont uniformément réparties à l'intérieur des classes.

- [a] Représenter la distribution de cette variable par un histogramme.
- [b] Calculer la moyenne arithmétique.
- [c] Calculer la médiane en faisant l'hypothèse d'équirépartition au sein de la classe (on donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible).
- [d] Calculer la classe modale.

La table pour la loi Gaussienne.
 $\Phi(t) = P(X \leq t)$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861