

Uniquement une feuille recto-verso de notes est autorisée

La durée de l'épreuve est 1 heure.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une formule ne sera pas suffisante pour avoir les points.

Les questions à l'intérieur d'un exercice sont indépendantes, vous pouvez donc faire les questions d'après même s'il y en a une que vous ne savez pas faire .

Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.

Exercice 1

On remplit un verre de volume 20 cl d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl :

1)(1.5 points) quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?

2)(1.5 points) on vide 5 verres ainsi remplis dans une très grande bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?

Exercice 2

Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on note Q_θ la loi sur \mathbb{R}_+ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

On observe un n -échantillon de loi Q_θ .

1.(0.5 point) écrire le modèle statistique correspondant.

2.(1 point) Est-ce que le modèle est identifiable ?

3.(3 points) Calculer le maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}^{MV}$ de θ .

4.(2 points) Quelle est la vitesse de l'estimateur $\hat{\theta}_1 := \bar{X}_n$ de θ ?

5.(Question bonus) (3 points) On cherche un estimateur $\hat{\beta}$ de $\beta := \sqrt{\theta + 2}$, quel estimateur proposez-vous ? Quelle est sa vitesse ?

$$v_n(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, a)$$

sera attendue avec un v_n et un a explicite.

Exercice 3

Soit (X_1, \dots, X_n) un n échantillon de variables aléatoires indépendantes de loi \mathbb{P}_θ pour $\theta \in]0; 1[$, telle que pour tout entier k , on a $\mathbb{P}_\theta(X_1 = k) = \theta(1 - \theta)^{k-1}$.

On pourra utiliser $\sum_{k=1}^{\infty} k(1 - \theta)^{k-1} = \frac{1}{\theta^2}$.

1.(0.5 point) écrire le modèle statistique correspondant.

2. (2 points) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments.

3.(1 point) Est-ce que le modèle est identifiable ?

4.(3 points) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance.

5.(4 points) On suppose que le modèle vérifie les hypothèses afin de pouvoir appliquer les résultats sur l'information de Fisher. Calculer la quantité d'information de Fisher.

Est-ce que $\hat{\theta} := \frac{1}{1+\bar{X}_n}$ est efficace ?