

Uniquement une feuille recto-verso de notes est autorisée

La durée de l'épreuve est 1 heure.

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une formule ne sera pas suffisante pour avoir les points.

Les questions à l'intérieur d'un exercice sont indépendantes, vous pouvez donc faire les questions d'après même s'il y en a une que vous ne savez pas faire .

Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.

### Exercice 1

On remplit un verre de volume 20 cl d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl :

- 1)(1.5 points) quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?
- 2)(1.5 points) on vide 5 verres ainsi remplis dans une très grande bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?

### Exercice 2

Pour chaque  $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ , on note  $Q_\theta$  la loi sur  $\mathbb{R}_+$  de densité

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

On observe un  $n$ -échantillon de loi  $Q_\theta$ .

- 1.(0.5 point) écrire le modèle statistique correspondant.
- 2.(1 point) Est-ce que le modèle est identifiable ?
- 3.(3 points) Calculer le maximum de vraisemblance, noté  $\hat{\theta}^{MV}$  de  $\theta$ .
- 4.(2 points) Quelle est la vitesse de l'estimateur  $\hat{\theta}_1 := \overline{X_n}$  de  $\theta$  ?
- 5.(Question bonus) (3 points) On cherche un estimateur  $\hat{\beta}$  de  $\beta := \sqrt{\theta + 2}$ , quel estimateur proposez-vous ? Quelle est sa vitesse ?

$$v_n(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, a)$$

sera attendue avec un  $v_n$  et un  $a$  explicite.

### Exercice 3

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$  échantillon de variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathbb{P}_\theta$  pour  $\theta \in ]0; 1[$ , telle que pour tout entier  $k$ , on a  $\mathbb{P}_\theta(X_1 = k) = \theta(1 - \theta)^k$ .

On pourra utiliser  $\sum_{k=1}^{\infty} k(1 - \theta)^{k-1} = \frac{1}{\theta^2}$ .

- 1.(0.5 point) écrire le modèle statistique correspondant.
  2. (2 points) Calculer  $\mathbb{E}(X_1)$  et déterminer un estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments.
  - 3.(1 point) Est-ce que le modèle est identifiable ?
  - 4.(3 points) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance.
  - 5.(4 points) On suppose que le modèle vérifie les hypothèses afin de pouvoir appliquer les résultats sur l'information de Fisher. Calculer la quantité d'information de Fisher.
- Est-ce que  $\hat{\theta} := \frac{1}{1 + \overline{X_n}}$  est efficace ?