Contrôle continu #2

Durée : 1h00. Feuille bleu autorisée, calculatrice et autres documents interdits.

Exercice 1 (Maximum de vraisemblance et loi géométrique)

On observe les dix réalisations suivantes de variables aléatoires i.i.d. $(X_i)_{1\leq i\leq 10}$ de loi géométrique, dont on souhaite estimer le paramètre $p \in]0,1[$ supposé inconnu. On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors $\mathbb{P}(X_i = k) = p(1-p)^{k-1}$.

Indice i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Observation x_i	1	3	5	4	2	6	1	4	3	1

1. *Calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et en déduire un estimateur de p par la méthode des moments.*
2. *Expliciter la vraisemblance $L(x_1,\dots,x_n,p)$ du modèle et la $\log-$vraisemblance associée.*
3. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{p}$ du paramètre p.*
4. *Au vu des données observées, quel est le paramètre p le plus probable ?*

Exercice 2 (Estimation et loi de Rayleigh)

On observe n réalisations $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ de variables aléatoires i.i.d. $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de loi de Rayleigh $\mathcal{R}(\sigma)$, i.e. de densité commune

$$f_\sigma(x) := \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x),$$

où le paramètre $\sigma > 0$ est inconnu. Dans la suite, on pourra utiliser sans les justifier les égalités

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = 2\sigma^2, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = 8\sigma^4.$$

1. *Expliciter le modèle statistique sous-jacent aux observations.*
2. *Par une intégration par parties et en utilisant les formules ci-dessus, montrer que $\mathbb{E}[X_1] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$.*
3. *Toujours à l'aide des formules ci-dessus, montrer que $var(X_1) = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$ et $var(X_1^2) = 4\sigma^4$.*
4. *Montrer que $\widetilde{\sigma}_n := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)$ est estimateur sans biais de σ. Est-il consistant ?*
5. *Justifier que lorsque n tend vers l'infini, $\sqrt{n}(\widetilde{\sigma}_n - \sigma)$ converge vers une loi normale $\mathcal{N}(0, (\frac{4}{\pi}-1)\sigma^2)$.*
6. *On rappelle que $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \leq 1.96) = 95\%$. Déduire de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour σ.*
7. *Calculer la vraisemblance et la $\log-$vraisemblance du modèle.*
8. *Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ est $\widehat{\sigma}_n := \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$.*
9. *Justifier que l'estimateur $\widehat{\sigma}_n$ est consistant.*
10. *Déterminer la limite de $\sqrt{n}(\widehat{\sigma}_n - \sigma)$ lorsque n tend vers l'infini ?*

Questions bonus

11. *En déduire un nouvel intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour σ.*
12. *Comparer les deux intervalles de confiance obtenus.*