Contrôle continu #1

Durée : 1h00. Feuille bleu autorisée, calculatrice et autres documents interdits.

Exercice 1 (Répartition de notes)
Les tableaux suivants représentent les notes de 100 étudiant·e·s à deux contrôles continus. Pour la première évaluation, notée sur 10, chaque case de la seconde ligne représente le nombre d'étudiant·e·s ayant obtenu la note considérée.

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CC1	0	2	3	10	20	30	20	10	0	5	0

1. *Calculer la moyenne du CC1.*
2. *Déterminer les médianes, les quartiles des notes et dessiner le diagramme en boîte à moustache associé.*

Pour la seconde évaluation, notée sur 20, les notes sont regroupées par intervalles de longueurs variables. On fera l'hypothèse que les données sont équiréparties dans les classes.

Notes	$[0,4[$	$[4,6[$	$[6,8[$	$[8,10[$	$[10,11[$	$[11,12[$	$[12,14[$	$[14,16[$	$[16,20[$
CC2	5	15	20	15	10	10	10	10	5

3. *Construire l'histogramme des notes du CC2.*
4. *Quel est la médiane des notes ?*
5. *En prenant comme référence le milieu de chaque intervalle, calculer la moyenne approchée.*

Exercice 2 (Durée de vie)
On s'intéresse à la durée de vie en années d'un composant électronique. Pour cela, on observe un grand nombre de composants sur une longue période. Au final, on note que 80% des composants ne fonctionnent plus après 4 ans alors que 95% des composants fonctionnent encore après 1.5 ans. On fait l'hypothèse que la durée de vie du composant est bien décrite par une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Au vu des données ci-dessus et de la table gaussienne au verso, déterminer les valeurs de m et σ^2.

Exercice 3 (Autour de la loi uniforme)
On considère n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(X_i)_{1\le i\le n}$, de loi uniforme sur un intervalle $[0,\theta]$ ou le paramètre $\theta>0$ est inconnu. Les X_i ont donc la densité commune $f(x)=\frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$.

1. *Calculer la moyenne et la variance de X_1.*
2. *En déduire la moyenne et la variance de $\hat\theta_n := 2\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)$.*
3. *Justifier que la suite $\hat\theta_n$ converge lorsque n tend vers l'infini. Quelle est sa limite ?*
4. *Justifier que la suite $Z_n := \sqrt{n}(\hat\theta_n-\theta)$ converge lorsque n tend vers l'infini. Quelle est sa limite ?*
5. *Expliciter la fonction de répartition de X_1, i.e. calculer pour $x\in\mathbb{R}$, la quantité $F(x):=\mathbb{P}(X_1\le x)$.*
6. *On considère la nouvelle variable aléatoire $M_n:=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$. Exprimer sa fonction de répartition $\mathbb{P}(M_n\le x)$ en fonction de $F(x)$. On pourra remarquer que $\{M_n\le x\}=\{X_1\le x, X_2\le x,\ldots,X_n\le x\}$.*
7. *Pour $\varepsilon>0$, calculer $\mathbb{P}(\theta-M_n\ge\varepsilon)$ et en déduire que M_n converge en probabilité vers θ lorsque n tend vers l'infini.*

Table de la loi normale centrée réduite

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, les entrées du tableau ci-dessous sont les valeurs de $\mathbb{P}(X \leq x)$ pour $x \in [0, 2.99]$.

x	**+0,00**	**+0,01**	**+0,02**	**+0,03**	**+0,04**	**+0,05**	**+0,06**	**+0,07**	**+0,08**	**+0,09**
0,0	0,500 00	0,503 99	0,507 98	0,511 97	0,515 95	0,519 94	0,523 92	0,527 90	0,531 88	0,535 86
0,1	0,539 83	0,543 80	0,547 76	0,551 72	0,555 67	0,559 62	0,563 56	0,567 49	0,571 42	0,575 35
0,2	0,579 26	0,583 17	0,587 06	0,590 95	0,594 83	0,598 71	0,602 57	0,606 42	0,610 26	0,614 09
0,3	0,617 91	0,621 72	0,625 52	0,629 30	0,633 07	0,636 83	0,640 58	0,644 31	0,648 03	0,651 73
0,4	0,655 42	0,659 10	0,662 76	0,666 40	0,670 03	0,673 64	0,677 24	0,680 82	0,684 39	0,687 93
0,5	0,691 46	0,694 97	0,698 47	0,701 94	0,705 40	0,708 84	0,712 26	0,715 66	0,719 04	0,722 40
0,6	0,725 75	0,729 07	0,732 37	0,735 65	0,738 91	0,742 15	0,745 37	0,748 57	0,751 75	0,754 90
0,7	0,758 04	0,761 15	0,764 24	0,767 30	0,770 35	0,773 37	0,776 37	0,779 35	0,782 30	0,785 24
0,8	0,788 14	0,791 03	0,793 89	0,796 73	0,799 55	0,802 34	0,805 11	0,807 85	0,810 57	0,813 27
0,9	0,815 94	0,818 59	0,821 21	0,823 81	0,826 39	0,828 94	0,831 47	0,833 98	0,836 46	0,838 91
1,0	0,841 34	0,843 75	0,846 14	0,848 49	0,850 83	0,853 14	0,855 43	0,857 69	0,859 93	0,862 14
1,1	0,864 33	0,866 50	0,868 64	0,870 76	0,872 86	0,874 93	0,876 98	0,879 00	0,881 00	0,882 98
1,2	0,884 93	0,886 86	0,888 77	0,890 65	0,892 51	0,894 35	0,896 17	0,897 96	0,899 73	0,901 47
1,3	0,903 20	0,904 90	0,906 58	0,908 24	0,909 88	0,911 49	0,913 09	0,914 66	0,916 21	0,917 74
1,4	0,919 24	0,920 73	0,922 20	0,923 64	0,925 07	0,926 47	0,927 86	0,929 22	0,930 56	0,931 89
1,5	0,933 19	0,934 48	0,935 74	0,936 99	0,938 22	0,939 43	0,940 62	0,941 79	0,942 95	0,944 08
1,6	0,945 20	0,946 30	0,947 38	0,948 45	0,949 50	0,950 53	0,951 54	0,952 54	0,953 52	0,954 49
1,7	0,955 43	0,956 37	0,957 28	0,958 18	0,959 07	0,959 94	0,960 80	0,961 64	0,962 46	0,963 27
1,8	0,964 07	0,964 85	0,965 62	0,966 37	0,967 12	0,967 84	0,968 56	0,969 26	0,969 95	0,970 62
1,9	0,971 28	0,971 93	0,972 57	0,973 20	0,973 81	0,974 41	0,975 00	0,975 58	0,976 15	0,976 70
2,0	0,977 25	0,977 78	0,978 31	0,978 82	0,979 32	0,979 82	0,980 30	0,980 77	0,981 24	0,981 69
2,1	0,982 14	0,982 57	0,983 00	0,983 41	0,983 82	0,984 22	0,984 61	0,985 00	0,985 37	0,985 74
2,2	0,986 10	0,986 45	0,986 79	0,987 13	0,987 45	0,987 78	0,988 09	0,988 40	0,988 70	0,988 99
2,3	0,989 28	0,989 56	0,989 83	0,990 10	0,990 36	0,990 61	0,990 86	0,991 11	0,991 34	0,991 58
2,4	0,991 80	0,992 02	0,992 24	0,992 45	0,992 66	0,992 86	0,993 05	0,993 24	0,993 43	0,993 61
2,5	0,993 79	0,993 96	0,994 13	0,994 30	0,994 46	0,994 61	0,994 77	0,994 92	0,995 06	0,995 20
2,6	0,995 34	0,995 47	0,995 60	0,995 73	0,995 85	0,995 98	0,996 09	0,996 21	0,996 32	0,996 43
2,7	0,996 53	0,996 64	0,996 74	0,996 83	0,996 93	0,997 02	0,997 11	0,997 20	0,997 28	0,997 36
2,8	0,997 44	0,997 52	0,997 60	0,997 67	0,997 74	0,997 81	0,997 88	0,997 95	0,998 01	0,998 07
2,9	0,998 13	0,998 19	0,998 25	0,998 31	0,998 36	0,998 41	0,998 46	0,998 51	0,998 56	0,998 61