

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une formule ne sera pas suffisante pour avoir les points.

Durée de l'épreuve 1h30

Partiel

Exercice 1

Deux amis jouent ensemble, on compte le nombre de fois k dans la semaine où c'est Sébastien qui gagne. Voici les résultats

nombre de victoires de Sébastien dans la semaine	0	1	2	3	4	5	6	7
nombre de semaines où Sébastien a eu ce nombre de victoires	2	4	10	12	9	8	6	4

- Déterminer la moyenne du nombre de victoires de Sébastien par semaine sous la forme d'une fraction irréductible.
- Quelle est la variance de cette série (vous n'avez pas besoin donner la valeur exacte il suffit d'écrire la valeur comme une somme, division et un produit de réels).
- Quelle est la médiane de cette série ?
- Représentez le diagramme en boîtes de cette série.

Exercice 2

On s'intéresse aux salaires des employés d'une entreprise de fabrication d'écharpes de portage.

montant du salaire	[0,1000[[1000,1500[[1500,2000[[2000,3000[
nombre de salariés qui sont dans la fourchette correspondante	4	10	14	2

On fait l'hypothèse que les données sont uniformément réparties à l'intérieur des classes.

- Représenter la distribution de cette variable par un histogramme
- Calculer la moyenne arithmétique sous la forme d'une fraction irréductible.
- Calculer la médiane à 10^{-1} près, sachant que $500/14 = 35,7$ à 10^{-1} près.
- Calculer la classe modale

Exercice 3

Des machines fabriquent des pancakes destinés à être empilés dans des paquets de 40. Chaque pancake a une épaisseur qui suit une loi normale de paramètres $\mu = 1\text{mm}$ et $\sigma^2 = 0.1$. Soit X la variable aléatoire «épaisseur du paquet en mm».

- Soit Y une variable aléatoire gaussienne de paramètre (μ_Y, σ_Y^2) et soit Z une variable aléatoire gaussienne de paramètre (μ_Z, σ_Z^2) . On suppose que Y et Z sont indépendantes.

Proposition Sous les hypothèses précédentes $Y + Z$ est une variable aléatoire gaussienne.

En utilisant la proposition précédente, quelle est la loi de $Y + Z$?

- En déduire la loi de X .
- Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 40 mm et 44 mm.

Exercice 4

Chaque jour ouvrable, le nombre de clients qui entrent dans un grand magasin est une v.a. Y qui suit une loi de Poisson de paramètre λ inconnu, avec $\lambda > 0$. Pour pouvoir estimer λ on dispose d'un échantillon sur n jours ouvrables de v.a. Y_1, \dots, Y_n de même loi que la v.a. Y , qui représente le nombre quotidien de clients qui sont rentrés dans le magasin.

1. Écrire le modèle statistique correspondant.
2. Calculer l'espérance d'une v.a de loi de Poisson de paramètre λ . Proposez un estimateur par la méthode des moments.
3. Est ce que le modèle est identifiable ?
4. Calculer le maximum de vraisemblance, noté $\hat{\lambda}^{MV}$ de λ .
5. Soit $\hat{\lambda}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Etudier le biais et le risque quadratique de $\hat{\lambda}_3$.
6. Quelle est la vitesse de $\hat{\theta}_3$.

$$\Phi(t) = P(X \leq t) \text{ pour } X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997