

Uniquement les calculatrices non scientifiques sont autorisées et une feuille recto-verso de note.

Durée : 2 heures

Attention toute réponse devra être précisément justifiée. Une formule ne sera pas suffisante pour avoir les points. Le barème est donné à titre indicatif et il est susceptible d'évoluer.

1 Des joueurs ont envie de créer un escape game à Liffré. Ils créent un sondage à Liffré dans le but de déterminer la proportion p d'individus ayant envie de faire un escape game.

On interroge 1000 personnes. Sur ces 1000 personnes, 352 affirment avoir envie de tenter l'expérience d'un escape game, et les autres n'en éprouvent pas l'envie. Sur la base de ces données, donner un intervalle de confiance à 90% pour p .

- 1) (2 points) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- 2) (2 points) En utilisant le théorème limite central.

2 Un père a deux garçons, et s'inquiète de la croissance de son cadet qu'il trouve petit. Il décide de faire un modèle familial à partir des mesures de taille en fonction de l'âge de l'aîné :

âge x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
taille y_i	96	104.8	110.3	115.3	121.9	127.4	130.8	136	139.7	144.5

On obtient les sommes suivantes : $\sum_{i=1}^{10} x_i = 75$ et $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 645$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 1226.7$ et $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 152750.57$ et $\sum_{i=1}^{10} y_i x_i = 9630.9$.

- a) (1 point) Calculer l'équation de la droite de régression linéaire de y en x .
- b) (1 point) Calculer le coefficient de corrélation observé. Etudier la qualité de l'ajustement.
- c) (1 point) Calculer le coefficient de détermination.

3 Soit le modèle d'échantillonnage suivant :

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{U}([\theta, \theta + 1])^{\otimes n}, \quad \theta \in [0, 1]$$

où $\mathcal{U}([\theta, \theta + 1])$ est la loi uniforme sur $[\theta, \theta + 1]$. Le paramètre d'intérêt est le paramètre de ce modèle.

1. (0.5 point) Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités.
2. (0.5 point) Ce modèle est-il dominé ?
3. (1 point) Le modèle est-il identifiable ?
4. (2 points) Est ce que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ existe ?
5. (2,5 points) Soit $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{2}$ un estimateur de θ . Est ce un estimateur biaisé ? Quelle est sa vitesse ?
6. (2 points) Donner un intervalle de confiance asymptotique à 90 pourcent de θ .
7. (1.5 points) Soit $\hat{\theta}_2 = \min_{i=1, \dots, n} X_i$ un estimateur de θ . Quelle est la loi de $\hat{\theta}_2$?
8. (1 point) Est ce $\hat{\theta}_2$ un estimateur biaisé ?
9. (2 points) Quelle est sa vitesse de $\hat{\theta}_2$? Pour cela on pourra penser à calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $n(\hat{\theta}_2 - \theta)$ et étudier sa limite.
10. (1 point) Question bonus : sur quel(s) critère(s) pourriez vous comparer ces deux estimateurs afin de savoir lequel est le plus pertinent ?

4 Lois exponentielles et lois de Poisson. La durée écoulée entre l'arrivée de deux mails consécutifs dans la messagerie de Gérard suit une loi exponentielle de paramètre inconnu. On suppose que ces durées sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes. L'observation est Y le nombre de mails arrivés dans la messagerie jusqu'à l'instant t .

- 1) (2,5 points) Quelle est la loi de Y ?
- 2) (1 point) Quel est le modèle statistique représentant cette expérience ?

Table 3**Loi Normale Centrée Réduite**Fonction de répartition $F(z)=P(Z<z)$ Exemple : $P(Z<1.96)= 0.97500$ se trouve en ligne 1.9 et colonne 0.06

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56750	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59484	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67365	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69498	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72241
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76731	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78231	0,78524
0,8	0,78815	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82382	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84135	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90148
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93575	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95544	0,95637	0,95728	0,95819	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97933	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99897	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976