

Statistique

Exercice 1

On lance 4720 fois une pièce équilibrée. Donner un intervalle centré en 0,5 contenant la proportion de "pile" obtenue avec probabilité supérieure à 0,99 (utiliser le théorème limite central).

Exercice 2

Monsieur Raimbourg décide de jouer à la roulette. Il parie systématiquement sur le rouge. Il fait mille parties, misant à chaque fois dix euros. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'il perde moins de cent euros (en utilisant le théorème limite central).

Exercice 3

Un homme politique influent et riche voudrait évaluer la proportion p de la population française pensant rouge (plutôt que bleu) sur une question donnée. Il a entendu parler de ce que peut faire un sondage mais ne sait pas comment s'y prendre. Sa commande est la suivante : il veut un intervalle de longueur 2% contenant p avec probabilité supérieure à 0,999. Évaluer la taille de l'échantillon nécessaire pour répondre à sa commande.

- 1) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- 2) En utilisant le théorème limite central.

Exercice 4

On effectue un sondage aléatoire dans la population française dans le but de déterminer la proportion p d'individus éprouvant de la peur à l'idée d'effectuer un voyage en avion.

On interroge 1000 personnes. Sur ces 1000 personnes, 253 affirment éprouver la peur de l'avion, les 747 restantes n'éprouvant pas d'appréhension particulière. Sur la base de ces données, proposer une fourchette de valeurs plausibles pour la valeur de p (donner un intervalle de confiance à 90%).

- 1) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- 2) En utilisant le théorème limite central.

Exercice 5

À la suite d'un premier infarctus du myocarde, 10% des patients font une rechute. La prise d'un anticoagulant pourrait permettre de réduire ce risque. On met en place un essai clinique pour tester l'effet de l'anticoagulant dans la prévention des rechutes. On fait un essai avec 500 patients. On observe un taux de rechute de 8,5%. Peut-on considérer au niveau 0,95 que l'anticoagulant a un effet ? Et si on avait observé le même taux avec une étude portant sur 10000 patients ? Utiliser le théorème limite central.

Exercice 6

Une compagnie d'assurance se propose d'assurer 100000 clients contre le vol. Les sommes en euros (la plupart du temps nulles) X_1, \dots, X_{100000} qu'aura à rembourser chaque année la compagnie aux clients sont des v.a. indépendantes d'espérance 75 et d'écart type 750. Quelle somme cette compagnie d'assurance doit-elle faire payer à chaque client par an pour que ses frais évalués à 1,5 millions d'euros soient couverts avec une probabilité supérieure ou égale à 0.999 ? (On utilisera sans justification l'approximation par la loi normale.)

Exercice 7

Une compagnie aérienne a N places dans ses avions qu'elle vend à un prix P . Ses clients ne se présentent pas à l'embarquement avec probabilité p . Elle décide de vendre plus de places que ce dont elle dispose avec la politique suivante : si un client ne se présente pas il perd le prix de son billet, si un client se présente mais n'a pas de place la compagnie l'indemnise à hauteur de λP ($\lambda > 1$). La compagnie souhaite qu'avec une probabilité supérieure à 95% son chiffre d'affaire soit supérieur à NP . Combien doit-elle vendre de places au maximum (on supposera que N est grand et on utilisera une approximation par la loi normale) ? Est-ce ce critère qu'utiliserait une compagnie pour décider comment elle fixe ses prix ? Application numérique : $N = 5000$, $p = 0,1$, $\lambda = 4$.

Exercice 8

Monsieur Soal s'intéressait à certains phénomènes paranormaux, par exemple à la télépathie. Il a mené dans ce cadre de multiples expériences dans lesquelles il demandait à différentes personnes de deviner des cartes. L'une de ces expériences a consisté à faire deviner la valeur d'une carte parmi cinq à madame Gloria Stewart. L'expérience a été menée 37100 fois. Madame Stewart a trouvé la bonne valeur 9410 fois. Monsieur Soal avait une formation de mathématicien ; il a donc utilisé les techniques mathématiques pour analyser ce résultat. Considérons l'expérience comme un moyen pour évaluer la probabilité, notée p , qu'a madame Stewart de deviner la valeur de la carte.

1) Donner des intervalles de confiance pour p aux niveaux 0,95, 0,99, 0,999, 0,99999.

2) Plaçons-nous sous l'hypothèse que madame Stewart réponde au hasard. Donner une majoration de la probabilité que la proportion du nombre de fois où elle devine la valeur de la carte soit supérieure à 0,23.

Vous ne trouverez pas de valeur approchée dans la table. Une possibilité : majorée la probabilité en utilisant (si $a > 0$ et X suit une loi normale centrée réduite) :

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a}$$

3) Les principes de la statistique mathématique ne nous invitent-ils pas ici à considérer que madame Stewart a effectivement un pouvoir qui consisterait à deviner significativement plus souvent la valeur de la carte que le hasard ? Après tout c'est ainsi qu'on procède pour affirmer qu'un médicament est efficace (significativement plus que le placebo), non ?

La réponse à cette question serait affirmative si les données fournies par monsieur Soal étaient fiables. Or ce n'est pas le cas. À plusieurs reprises dans sa carrière, il a procédé à des opérations sur ses données qui les rendent inutilisables. Ces opérations peuvent sembler inoffensives parfois : choisir l'outil d'analyse après avoir recueilli les données plutôt qu'avant (l'un des principes de la statistique est de ne pas le faire, même si l'outil est valable), oublier une partie des données,...