# FEUILLE DE TDS 7 : TESTS

$\boxed{1}$ **Test de Student et de Fisher : exercice à savoir faire et à penser à utiliser dans les autres exercices.**

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n$ échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Soit $(x_1, ..., x_n)$ une observation de ce $n$-échantillon.

Pour $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\bar{u}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i$ et $s_n^2(u) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u}_n)^2$.

1) Le premier but de l'exercice est de construire un test pur de niveau $\alpha \in (0, 1)$ dans le problème de test de $\mathcal{H}_0 : \theta \geq \theta_0$ contre l'alternative $\mathcal{H}_1 : \theta < \theta_0$.

Soit $t$ le quantile d'ordre $\alpha$ de la loi $\mathcal{T}(n-1)$.

Montrer que le test pur de région de rejet

$$R_{Student} = \{u \in \mathbb{R}^n \ : \bar{u}_n \leq \theta_0 + t\frac{s_n(u)}{\sqrt{n}}\},$$

appelé test de Student, est de niveau $\alpha$. La procédure de décision consiste donc à rejeter $\mathcal{H}_0$ au niveau $\alpha$ lorsque $(x_1, ..., x_n) \in R_{Student}$.

2) Le deuxième but de l'exercice est de construire un test pur de niveau $\alpha \in (0, 1)$ dans le problème de test de $\mathcal{H}_0 : \sigma \geq \sigma_0$ contre l'alternative $\mathcal{H}_1 : \sigma < \sigma_0$.

Soit $t$ le quantile d'ordre $\alpha$ de la loi $\chi^2_{n-1}$.

Montrer que le test pur de région de rejet

$$R_{Fisher} = \{u \in \mathbb{R}^n \ : s_n^2(u) \leq \sigma_0^2 \frac{t}{n-1}\},$$

appelé test de Fisher, est de niveau $\alpha$. La procédure de décision consiste donc à rejeter $\mathcal{H}_0$ au niveau $\alpha$ lorsque $(x_1, ..., x_n) \in R_{Fisher}$.

$\boxed{2}$ L'objectif de l'étude est de préciser si la taux de sucre d'un soda respecte les recommandations d'un organisme de santé indépendant, à savoir une valeur inférieure à 0.100 g/ml. Dans des conditions expérimentales assurant l'indépendance des observations, 10 bouteilles de la production sont analysées. Sur cette observation, on observe un taux moyen de 0.103 g/ml de sucre et un écart-type de 0.010 g/ml. On suppose que les 10 observations sont issues d'une même loi gaussienne.

1) Préciser le modèle statistique.

2) Construire le test en se plaçant du point de vue du directeur de l'usine de fabrication du soda. Quelle serait sa conclusion au niveau 5% ?

3) Construire le test en se placant du point de vue de l'organisme de santé. Quelle serait sa conclusion au niveau 5% ?

$\boxed{3}$ Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ issus d'une loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On souhaite tester $\mathcal{H}_0 : \lambda = 1/2$ vs. $\mathcal{H}_1 : \lambda = 1$. Quelle est la région de rejet au niveau 0,05 pour le test de Neyman Pearson simple ?

$\boxed{4}$ Soit à tester $\mathcal{H}_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $\mathcal{H}_1 : \lambda \neq \lambda_0$ pour le paramètre $\lambda$ de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ à partir d'un échantillon de taille $n$. Établir formellement le test du test des vraisemblances maximales. Application : établir le test pour $\lambda_0 = 1/4$ et $n = 30$ en utilisant la loi asymptotique du test des vraisemblances maximales.

$\boxed{5}$ Afin de tester la satisfaction des clients à un service donné, on effectue un sondage et on définit une variable aléatoire $Y_i$ de la façon suivante :
$Y_i = 1$ si le client i est satisfait
$Y_i = 0$ si le client i n'est pas satisfait
A l'aide d'un échantillon $(Y_1, ..., Y_n)$ de même loi de Bernoulli de paramètre $\lambda$ on désire tester les hypothèse $\mathcal{H}_0 : \lambda = 0.58$ vs. $\mathcal{H}_1 : \lambda = 0.48$.

1) Construire la vraisemblance des observations $y_1, ..., y_n$ et expliciter la région de rejet de $\mathcal{H}_0$ du test de Neyman-Pearson (pour l'application numérique, on choisira un risque de première espèce $\lambda = 0.1$).

2) Déterminer la puissance de ce test.

$\boxed{6}$ Un producteur de pneus envisage de changer la méthode de fabrication. La distribution de la durée de vie de ses pneus traditionnels est connue : moyenne 64 000 km, écart-type 8 000 km ; elle est pratiquement gaussienne. Dix pneus sont fabriqués avec la nouvelle méthode et une moyenne de 67 300 km est constatée. En supposant que la nouvelle fabrication donnerait une distribution à peu près gaussienne et de même variance, testez l'efficacité de la nouvelle méthode au niveau $\alpha = 0,05$. Tracez la fonction puissance de ce test. (aide : test de $\mathcal{H}_0 : \lambda < \lambda_0$ contre $\mathcal{H}_1 : \lambda \geq \lambda_0$ )

$\boxed{7}$ Une enquête sur la gêne causée par la proximité d'un aéroport a donné, par sexe, les résultats suivants :

| Gêne \ Sexe | Femmes | Hommes | tous |
|---|---|---|---|
| Aucune | 75 | 35 | 110 |
| Faible | 25 | 27 | 52 |
| Moyenne | 17 | 8 | 25 |
| Forte | 3 | 12 | 15 |

Identifier la situation d'échantillonnage et poser l'hypothèse nulle correspondant à la question informelle : la gêne est-elle identique pour les deux sexes ? Tester cette hypothèse nulle.

$\boxed{8}$ On donne, pour une agglomération, la répartition du nombre de jours sans accident, avec un accident etc., parmi 50 jours d'observation tirés au hasard dans une année :

| nombre d'accidents | nombre de jour |
|---|---|
| 0 | 21 |
| 1 | 18 |
| 2 | 7 |
| 3 | 3 |
| 4 | 1 |

Tester que la répartition du nombre quotidien d'accidents suit une loi de Poisson. Aide : on effectuera le test du khi-deux en regroupant les catégories de façon à ne pas avoir de fréquences inférieures à 5. Pour simplifier on estimera $\lambda$ par l'estimation usuelle du maximum de vraisemblance.

$\boxed{9}$ On lance 450 fois un dé à 6 faces. On obtient les résultats suivants

| Numéro de la face observé | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif observé | 62 | 50 | 76 | 68 | 111 | 83 |

Est ce que le dé est bien équilibré ? (On pourra faire un test du chi 2 d'adéquation).

$\boxed{10}$ Dans un hôpital psychiatrique, on a recensé les résultats de 490 patients face à un certain médicament, on a note la saison pendant laquelle le médicament a été pris ainsi que le résultat.

| Saison | Réaction au médicament | non réaction au médicament |
|---|---|---|
| Printemps | 55 | 64 |
| Eté | 59 | 60 |
| Automne | 52 | 63 |
| Hiver | 60 | 77 |

Y-a-t-il un lien entre la saison et la réaction au médicament au seuil 5% ? (On pourra faire un test du chi 2 d'indépendance).