Université de Rennes | Master 1
Outils en Proba stats | année 2023-2024

Feuille de TDs 4 : Chaînes de Markov

$\boxed{1}$ **Modèle de diffusion d'Ehrenfest.** Soient d balles numérotées de 1 à d réparties dans 2 urnes A et B. On tire un nombre i au hasard entre 1 et d et la balle numéro i est changée d'urne. Soit X_n le nombre de balle dans l'urne A après n tirages indépendants. Alors $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov d'espace d'état $E = \{1, 2, ..., d\}$.

Ecrire la matrice de transition.

$\boxed{2}$ Le chauffage d'une maison individuelle est composé d'un chauffage de base et d'un chauffage d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 2 si les deux chauffages fonctionnent.

Si un jour on est dans l'état 1, on estime que le lendemain on est encore dans l'état 1 avec une probabilté 1/2. Si on est dans l'état 2, le lendemain la maison sera chaude et on pourra passer à l'état 1 avec probabilité 3/4. Soit X_n l'état du système au jour n. $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov.

1. Déterminer la matrice de transition P.
2. Soit $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1), n \geq 0$. Déterminer une relation de recurrence entre p_n et p_{n+1}.
3. Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.
4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec probabilité 3/5, alors tous les jours, on a encore une probabilité 3/5 d'être dans l'état 1.
5. Chaque journée dans l'état 1 coûte 2 euros, dans l'état 2 coûte 4 euros et chaque transition de 1 à 2 ou de 2 à 1 coûte 1 euro. Calculer le coût moyen dans la situation précédente.

$\boxed{3}$ **Chaîne de Markov à deux états.** On considère une machine qui, en début de journée, peut être en état de marche : état 1, ou en état de panne : état 0. On suppose que, si la machine est en panne au début du $n$ème jour, elle a une proba p d'être en état de marche au début du $n+1$ème jour, si la machine est en état de marche au début du $n$ème jour, elle a une proba q d'être en panne au début du $n+1$ème jour. On note X_n la variable aléatoire égale à l'état de la machine au $n$ème jour. $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov. On suppose que : $\mathbb{P}(X_0 = 0) = \nu(0)$ et $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \nu(1) = 1 - \nu(0)$

1. Déterminer la matrice de transition P.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 0/X_0 = 0, X_2 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = (1 - p - q)\mathbb{P}(X_n = 0) + q$. En déduire, par récurrence sur n, $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1)$.
   Que se passe-t-il lorsque $p = q = 0$?
4. On suppose que $0 < p, q < 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{q}{p+q}$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{p}{p+q}$. Que se passe-t-il lorsque $\nu(0) = \frac{q}{p+q}$?
5. Calculer P^n.
6. Déterminer sa probabilité stationnaire Π.
7. Calculer $\mathbb{P}_0(T_1 = n)$, $\mathbb{P}_0(T_0 = n)$.

$\boxed{4}$ **Bruit qui court.** Un message pouvant prendre deux formes ("oui" et "non") est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme avec probabilité $1 - p$. Les intermédiaires sont indépendants.

Modéliser cette situation par une chaîne de Markov homogène à deux états et calculer la probabiltés que l'informations transmise par le n-ième intermédiaires soit conforme à l'information initiale. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$.

$\boxed{5}$ **Exemple d'application de la propriété de Markov faible.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P. Montrer les relations suivantes :

1. $P^n(x, y) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_x(T_y = m)P^{n-m}(y, y)$ pour $n \geq 1$.
2. Si a est un état absorbant, $\mathbb{P}_x(X_n = a) = \mathbb{P}_x(T_a \leq n)$ pour $n \geq 1$.
3. $\mathbb{P}_x(T_y = n + 1) = \sum_{z\neq y} P(x, z)\mathbb{P}_z(T_y = n)$ pour $n \geq 1$.
4. $\rho_{xy} = P(x, y) + \sum_{z\neq y} P(x, z)\rho_{zy}$.

$\boxed{6}$ Pour chacune des matrices P suivantes, déterminer les états transitoires et les classes de récurrence.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$ Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de matrice de transition $P = ((P(i,j))_{(i,j)\in E^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$.

1. Effectuer la classification des états : déterminer les classes de récurrence et les états transitoires.
   Dessiner son graphe.

2. Calculer les mesures invariantes.

$\boxed{8}$ **Probabilités d'absorption.*** On considère $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P et d'espace d'états E ; soit E_T le sous ensemble des états transitoires, supposé fini et non vide ; C un sous-ensemble clos irréductible d'états récurrents.

1. Montrer que $\forall x \in E\ \forall y \in E_T,\ P^n(x,y) \underset{n}{\to} 0$. En déduire que si E est fini, la chaîne a au moins un état récurrent.
2. Montrer que le système d'équations
$$f(x) = \sum_{y \in C} P(x,y) + \sum_{y \in E_T} P(x,y) f(y)\ (x \in E_T)$$
admet comme seule solution bornée sur E_T :
$$f(x) = \rho_C(x) = \mathbb{P}_x(T_C < \infty).$$
3. Soit désormais $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Compléter la matrice P pour qu'elle soit une matrice de transition : $P = \begin{pmatrix} * & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & * & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & * \end{pmatrix}$. Déterminer :
   — les états transitoires et récurrents,
   — les probabilités d'absorption dans les sous-ensemble clos irréductibes.
   — (*) Montrer que la chaîne admet une infinité de probabilités stationnaires que l'on calculera.
   — (*) Que vaut la fréquence-limite du nombre de passages dans l'état 1 ?