Université de Rennes — Master 1

Outils en Proba stats — année 2023-2024

Feuille de Tds 3 : Variable aléatoires et théorèmes limites

$\boxed{1}$ **Simulation.** On suppose que l'on sait simuler des nombres aléatoires uniformément répartis sur $[0,1]$. Donner une méthode de tirage de nombres aléatoires répartis sur $[0,1]$. Donner une méthode de tirage de nombres aléatoires suivant une loi de probabilité ν donné.

1. Si ν est une loi discrète.
2. Si ν est une loi sur $\mathbb{R}$ de f.r. F.
   Indication On pourra définir une application G de telle sorte que $G(t) < x \Leftrightarrow t < F(x)$.

$\boxed{2}$ **Loi de $F(X)$.** Soit X une v.a.r. de f.r. F. On suppose F continue. Donner la loi de probabilité de $F(X)$. (On pourra commencer par supposer que F est strictement croissante).

$\boxed{3}$ On observe $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires (noté v.a.) i.i.d. dont l'espérance est m et la variance σ^2 (qui est fini et strictement positive).

1. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$.
2. On pose $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Calculer l'espérance S_n^2.

$\boxed{4}$ Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose pour tout entier j : $q_j = \mathbb{P}(X > j)$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j.$$

$\boxed{5}$ Soit X et Y deux variables aléatoires réelles (noté v.a.r.) indépendantes de même loi continue de fonction de répartition (f.r.) F. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

$\boxed{6}$ Soit X une variable aléatoire discète prenant ses valeurs uniformément sur $\{0,1,2\}$.

1. Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$ en donnant son support et $\mathbb{P}(Y = \cdot)$. Quelle est son espérance ?
2. Déterminer la loi de $Z = X^2$ en donnant son support et $\mathbb{P}(Z = \cdot)$. Quelle est son espérance ?

3.* Déterminer la loi de $W = \frac{1}{1+X}$ en donnant son support et $\mathbb{P}(W = \cdot)$. Quelle est son espérance ?

$\boxed{7}$ Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2]$.

1. Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$ en donnant la densité. Quelle est son espérance ?

2. Déterminer la loi de $Z = X^2$ en donnant la densité. Quelle est son espérance ?

3.* Déterminer la loi de $W = X^3$ en donnant la densité. Quelle est son espérance ?

$\boxed{8}$ On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot (1-x)^{1/3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité. Soit Y une variable aléatoire ayant pour densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire Y. Donnez en une représentation graphique.

3. Quelle est l'espérance de Y ?

4. Calculez la probabilité de l'évenement $\{0.4 < Y < 1.2\}$.

$\boxed{9}$ Soit $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1+x)/5 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ (3+x)/10 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 3x/10 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ unique sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer les atomes de $\mathbb{P}$, c'est-à-dire les points de discontinuité de F.
3. Décomposer F en somme d'une fonction de répartition continue et d'une fonction de répartition d'une loi discrète.
4. Déterminer l'espérance, le moment d'ordre 2 et la variance d'une v.a. X de loi $\mathbb{P}$.

$\boxed{10}$ Soit X une variable aléatoire. On suppose que l'écart-type de X : $\sigma(X) > 0$ On appelle variable aléatoire centrée réduite associée à X, la variable aléatoire X^* définie par :

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Trouver $\mathbb{E}(X^*)$ et $Var(X^*)$.

$\boxed{11}$ Soit X une variable aléatoire qui est distribué selon la loi Binomiale de paramètre (n, p), c.à.d., $X \sim \mathcal{B}in(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer si $\epsilon > 0$ alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n}.$$

$\boxed{12}$ Chaque année, M. Dupont effectue deux fois par jour, 5 jours par semaine et pendant 46 semaines, un trajet en voiture dont la durée est une v.a.r. Y qui suit une loi d'espérance 45 min et d'écart-type 10 min. On suppose que les durées des trajets sont mutuellement indépendantes. Soit X la somme de toutes les durées de trajets.

1. Par quelle loi peut-on aproximer la loi de $W = \frac{X - 460*45}{\sqrt{46000}}$?

En utilisant l'approximation précédente, quelle est la probabilité pour que M. Durand passe au moins 350 h dans sa voiture au cours de l'année ? 2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pouvez-vous majorez la probabilité pour que Monsieur Dupont passe au moins 350 heures dans sa voiture au cours de l'année ?

3. Qu'en pensez-vous ?

$\boxed{13}$ On suppose que l'intervalle de temps entre deux voitures successives à un passage à niveau (peu fréquenté) suit une loi exponentielle de moyenne 30 minutes. On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les intervalles de temps séparant les instants de passage de voitures. Calculer (une valeur approchée de) la probabilité qu'il y ait plus de 50 voitures qui empruntent le passage à niveau une journée donnée.

$\boxed{14}$ Soient X, Y, Z trois v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer la loi de $X + Y$, $\frac{1}{2}(X + Y)$, $\frac{1}{3}(X + Y + Z)$.

$\boxed{15}$ Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants : 56% ont un taux inférieur à 165 cg et 10% ont un taux supérieur à 180 cg. Quel est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10 000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

$\boxed{16}$ **Caractérisation de la loi normale.** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes et de même loi. On suppose que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ est de même loi que X et Y et que cette loi est de variance finie σ^2.

1. Montrer que la loi de X est centrée.
2. Montrer que si X_1, X_2, Y_1, Y_2 sont des v.a.r. indépendantes de même loi que X, $\frac{X_1+X_2+Y_1+Y_2}{2} \sim X$

1. Démontrer par récurrence en utilisant le théorème limite centrale que $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

La table pour la loi Gaussienne.
$\Phi(t) = P(X \leq t)$ pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861