Université de Rennes — Master 1
Outils en Proba stats — année 2023-2024

Feuille de Tds 2 : Probabilité conditionnelle

$\boxed{1}$. **Le problème de Monty Hall :** Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur).

Le joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Le joueur doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou d'ouvrir la troisième porte. S'il ouvre la porte derrière laquelle se trouve la voiture, il l'emporte.

Les questions qui se posent au candidat sont :

— Que doit-il faire ?
— Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

$\boxed{2}$ **Problème de télécommunications :** un message binéaire est transmis sous la forme de 0 et de 1. Durant le transfert, 2/5 de 0 sont chargés en 1 et 1/3 de 1 sont changés en 0. Le message contient 3/5 de 1.

1. Calculer la probabilité que le signal reçu soit égal au signal transmis, si le signal reçu est 0 ou 1.
2. La fiabilité de cette transmission étant peu satisfaisante, on tente de l'améliorer en triplant le message envoyé (trois fois 0 ou trois fois 1). Le décodeur décide que le message est égal au message reçu au moins deux fois. Calculer la probabilité d'erreur selon que le message transmis est 0 ou 1.

$\boxed{3}$ Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événement suivants :

$A =$ "les deux enfants sont de sexes différents" , $B =$ " l'ainé est une fille " et
$C =$ "le cadet est un garçon".

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants. On suppose que la probabilité à la naissance d'avoir une fille (respectivement un garçon) est égale à 1/2.

$\boxed{4}$ On suppose qu'on a un espace probabilisé tel que l'univers Ω est un ensemble fini de cardinal un nombre premier p, et que le modèle choisi soit celui de l'équiprobabilité. Prouver que deux événements A et B non triviaux (différent de $\emptyset$ et Ω) ne peuvent pas être indépendants.

$\boxed{5}$ On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

$\boxed{6}$ Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

$\boxed{7}$ Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un peuplier ? un hêtre ?

$\boxed{8}$ Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi. On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ et on considère $a \in \mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\mathbb{P}(X_1 \geq a) > 0. \iff \forall n \geq 1, \mathbb{P}(S_n \geq na) > 0.$$

$\boxed{9}$ On considère n menteurs I_1, I_2,... I_n. I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non", la transmet à I_2, ainsi de suite jusqu'à I_n, et I_n l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p, $0 < p < 1$, le contraire avec probabilité $1 - p$, et les réponses des n personnes sont indépendantes. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise. Que se passe-t-il quand n tends vers l'infini ?