

Devoir maison

Une attention particulière sera portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

A rendre au plus tard pour le 11 octobre à midi dans mon casier ou par mail.

1 L'ensemble des zéros du mouvement brownien

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \Omega \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\omega, t) &\rightarrow \mathbb{1}_{\{B_t(\omega)=0\}} \end{aligned}$$

est mesurable lorsque l'on munit $\Omega \times \mathbb{R}^+$ de la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

Indication : on pourra considérer les ensembles de la forme

$$E_{a,b} = \{\omega \in \Omega \mid \forall t \in]a, b[, B_t \neq 0\}$$

pour tous $0 \leq a < b$, et montrer qu'ils sont dans $\mathcal{F}$.

2. Soit $\mathcal{Z} = \{t \geq 0 \mid B_t = 0\}$, l'ensemble des zéros du mouvement brownien.

Montrer que p.s. $\mathcal{Z}$ est fermé, non borné, de mesure de Lebesgue nulle et sans point isolé.

Indication : on pourra considérer les temps d'arrêt $d_q = \inf\{t \geq q \mid B_t = 0\}$ pour $q \in \mathbb{Q}^+$.

2 Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration et $M := (M_t)_{t \geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)$ martingale continue avec $M_0 = 0$. On suppose de plus que le processus $(M_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est aussi une $(\mathcal{F}_t)$ martingale. Le but de l'exercice est de montrer qu'alors M est le mouvement brownien.

1. Le but de cette partie est de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$E(e^{ix(M_{t+h}-M_t)} | \mathcal{F}_t) = e^{-\frac{1}{2}x^2h} \quad (1)$$

– Soit $t, h \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, posons $M_{k,n} := M_{t+\frac{k}{n}h} - M_{t+\frac{k-1}{n}h}$. En utilisant $M_{t+h} - M_t = \sum_{k=1}^n M_{k,n}$, $e^{-\alpha} - 1 + \alpha = O(\alpha^2)$ et

$$\mathbb{E}(e^{ix(M_{t+h}-M_t)} | \mathcal{F}_t) - e^{-\frac{1}{2}x^2h} = \sum_{r=0}^{n-1} \mathbb{E}(e^{ix(\sum_{k=1}^{r+1} M_{k,n})} - e^{ix(\sum_{k=1}^r M_{k,n}) - \frac{1}{2n}x^2h} | \mathcal{F}_t) e^{-\frac{1}{2n}(n-r-1)x^2h}$$

montrer que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(e^{ix(M_{t+h}-M_t)} | \mathcal{F}_t) - e^{-\frac{1}{2}x^2h}| &\leq O\left(\frac{1}{n}\right) + \\ &\sum_{r=0}^{n-1} \mathbb{E} \left(\left| \mathbb{E} \left(e^{ixM_{r+1,n}} - 1 - ixM_{r+1,n} + \frac{x^2}{2}(M_{r+1,n})^2 \mid \mathcal{F}_{t+\frac{rh}{n}} \right) \right| \mid \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

– Montrer que

$$\mathbb{E}((M_{t+h} - M_t)^4 | \mathcal{F}_t) \leq 12h^2.$$

Pour cela on pourra utiliser (en la justifiant)

$$(M_{t+h} - M_t)^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n M_{k,n}^4 + 3 \left(\sum_{k=1}^n M_{k,n}^4 \right) - 4 \left(\sum_{k=1}^n M_{k,n}^3 \right) \left(\sum_{l=1}^n M_{l,n} \right) \right)$$

- En utilisant la question précédente montrer que

$$|\mathbb{E}(M_{t,k}^3 | \mathcal{F}_{t+\frac{rh}{n}})| = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

- En déduire

$$|\mathbb{E}(e^{i(M_{t+h}-M_t)} - e^{-\frac{1}{2}x^2h} | \mathcal{F}_t)| = O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

- Montrer (1).

2. Conclure que M est un mouvement brownien.