Université Rennes 1
Année 2015-2016 AL2

CCI4

Une attention particulière sera être portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

Exercice 1:

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note g l'application linéaire définie par $g(e_1) = e_3$, $g(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $g(e_3) = e_3$

1. Écrire la matrice A de g dans la base (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de cette application.

2. On pose $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_1 - e_2$ et $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de v_1, v_2, v_3. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

3. Calculer $g(v_1)$, $g(v_2)$ et $g(v_3)$ en fonction de v_1, v_2, v_3.

Écrire la matrice B de g dans la base (v_1, v_2, v_3) et trouver la nature de l'application g.

4. On pose

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que représente P ?

Quelle relation lie A , B , P et P^{-1} ?

Exercice 2:
Soit E un $\mathbb{R}$ e.v.. On rappelle qu'un endomorphisme p de E est un projecteur si $p \circ p = p$.

1) Montrer que p est un projecteur si et seulement si $q := Id_E - p$ en est un.

2) Montrer que $Ker(p) = Im(Id_E - p)$.