# Partiel

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction. Toute réponse devra être précisément justifiée.

*Durée de l'épreuve : 1 heure*

---

**Inscrivez le numéro de votre groupe de TD sur votre copie.** Rappel - le lundi : G1 avec Fabrice Grela et G2 avec Camille Doukhan ; le vendredi : G3 avec Guillaume Poly, G4 avec Fabrice Grela et G5 avec Nathalie Krell.

**Exercice 1 :** *(2,5 points)*

Énoncer la formule du binôme de Newton et en déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

**Exercice 2 : Dans cet exercice, vous effectuerez les calculs et donnerez les résultats sous forme de fractions irréductibles.**

Un bar propose 7 cocktails différents. Dans la suite de l'exercice, on ne tiendra pas compte de l'ordre dans lequel les cocktails sont achetés.

1. *(1,5 points)* Combien y a t'il de possibilités d'acheter 3 cocktails différents ?
2. *(1,5 points)* Sur les 7 cocktails, 3 sont sans alcool et 4 contiennent de l'alcool. Combien y a t-il de possibilités d'acheter 2 cocktails alcoolisés différents et 1 cocktail sans alcool ?
3. *(1 point)* Quelle est la probabilité qu'en achetant 3 cocktails au hasard, 2 soit différents et alcoolisé et 1 soit sans alcool ?

**Exercice 3 : Dans cet exercice, vous n'effectuerez pas les calculs.**

Un QCM comporte 20 questions différentes. Un élève répond au hasard et pour chaque question la probabilité qu'il donne la bonne réponse est de 1/4. On suppose que cet élève répond de manière indépendante à chaque question.

1. *(1 point)* On note $X$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la réponse donnée par cet élève à la première question est juste et 0 sinon. Quelle est la loi de $X$ ? On précisera le ou les paramètres de la loi.
2. On note $Y$ la variable aléatoire qui modélise le nombre total de bonnes réponses obtenu par l'élève sur les 20 questions.
   (a) *(2 points)* Quelle est la loi de $Y$ ? Justifier la réponse. On précisera le ou les paramètres de la loi.
   (b) *(1 point)* Quelle est la probabilité que l'élève ait exactement 10 bonnes réponses ?
   (c) *(1,5 points)* Quelle est la probabilité que l'élève ait au moins 1 bonne réponse ?

**Exercice 4 : Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.**

1. Un parc d'attraction propose 12 manèges différents. **Pour cette question, vous n'effectuerez pas les calculs.**
   (a) *(1,5 points)* On suppose ici qu'on ne peut effectuer au maximum qu'une seule fois chaque attraction. En tenant compte de l'ordre dans lequel sont faites les attractions, combien de possibilités une personne a t'elle de faire exactement 5 attractions ?
   (b) *(1,5 points)* On suppose maintenant qu'une même attraction peut être faite autant de fois que l'on veut. En tenant compte de l'ordre dans lequel sont faites les attractions, combien de possibilités une personne a t'elle de faire exactement 5 attractions ?
2. *(1,5 points)* Les deux attractions les plus populaires du parc sont les montagnes russes et la maison hantée. La probabilité que la file d'attente dépasse une heure pour les montagnes russes est de 7/8 et de 3/7 pour la maison hantée. On suppose que le temps d'attente est indépendant d'une attraction à l'autre. Quelle est la probabilité que l'attente dépasse une heure pour les montagnes russes et pas pour la maison hantée ?

**Exercice 5 :**

Soit $Z$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[Z] = 3$ et $\mathrm{Var}(Z) = 4$.

1. *(1 point)* Calculer $\mathrm{Var}(1 - Z)$.
2. *(2 points)* Calculer $\mathbb{E}[2Z^2 + 3]$.
3. *(1,5 points)* Construire à partir de $Z$ une variable aléatoire $X$ centrée réduite. On rappelle qu'une variable aléatoire centrée réduite est d'espérance nulle et de variance égale à 1.