Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

5 octobre 2016

Algébre linéaire 2

(durée : 45 minutes)

Calculatrices et documents prohibés.

Le sujet comporte deux exercices indépendants.
La clarté de la rédaction et la propreté de la présentation seront prises en compte.

Exercice 1

Soit G un groupe noté multiplicativement. Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$. Soit $(S_G, \circ)$ le groupe des permutations de G muni du produit de composition.

1) Montrer que τ_a est un morphisme du groupe $(G, \cdot)$ dans lui-même, c'est à dire que pour tout $x \in G$
$$\tau_a(x \cdot y) = \tau_a(x) \cdot \tau_a(y).$$
2) Vérifier que
$$\forall a, b \in G, \ \ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{a \cdot b}.$$
3) Montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.
4) Montrer que $\tau \subseteq S_G$.
5) En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a | a \in G\}$ est un sous groupe de $(S_G, \circ)$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul fixé, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. Soient deux réels α et β arbitraires et distincts, considérons les ensembles suivants :
$$\mathbb{E}_\alpha = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \text{tel que} \quad P(\alpha) = 0\} \ ; \text{ et } \ \mathbb{E}_\beta = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \text{tel que} \ \ P(\beta) = 0\}.$$
1) Montrer que $\mathbb{E}_\alpha$ est un sous espace vectoriel.
2) Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) On admet que la dimension de $\mathbb{E}_\alpha$ est de n. Montrer que la famille de polynômes suivant : $\{X^j(X-\alpha) \ \text{ pour } \ j \in \{0, 1, ..., n-1\}\}$ forment une base de cette espace.
4) Exprimer le polynôme $(X-\alpha)^3$ dans cette base.
5) On considère l'application Ω définie comme suit :
$$\Omega : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \quad / \quad P \longrightarrow \Omega(P)(X) = P(\alpha)X + P(\beta)$$
Montrer que Ω est une application linéaire.