Singularités des équations de Maxwell dans un polyèdre

Martin Costabel et Monique Dauge

IRMAR (URA CNRS 305), Université de RENNES 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, FRANCE

Résumé. Nous décrivons les parties non régulières des solutions des équations de Maxwell en régime harmonique à plusieurs niveaux: d'abord au niveau de base des espaces variationnels (supplémentaire dans H^1 des champs normaux sur le bord et à divergence et rotationnel L^2) ensuite au niveau des solutions avec données régulières. On peut trouver dans [5] des idées des démonstrations. Les preuves complètes seront publiées ailleurs.

Maxwell Singularities on Polyhedral or Polygonal Domains

Abstract. *We provide a description of the non regular parts of the fields involved in Maxwell equations, firstly at the variational level, secondly at the solution level when the right hand side has regularity properties. For ideas of the proofs, see [5]. Details will be published elsewhere.*

Abridged English Version

1. Motivation

In a bounded Lipschitz polyhedral domain Ω, we consider the harmonic Maxwell equations (1) with the perfect conductor boundary conditions. For any non zero frequency k, system (1) is equivalent to the saddle-point formulation (5) where the variational space for the electric fields is

$$X_N = \{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{curl}\,;\Omega) \mid \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

and the principal part of the bilinear form is $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\;\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$.

2. Singularities in the variational space

The subspace H_N of X_N of the $H^1(\Omega)$ fields is closed in X_N. The spaces X_N and H_N coincide if and only if Ω is convex. If Ω is not convex, elements generating a supplementary space of H_N in X_N can be described, either as gradients of singular solutions of the Dirichlet problem on Ω, or as curls of singular fields. At each non-convex edge $\boldsymbol{e}$ occurs one family of terms, at each non-convex corner $\boldsymbol{c}$ occurs at most one term, *see* (9) and (10).

3. Singularities of the saddle-point problem

Beyond the splitting of the variational space itself, the solution of problem (5) admits, according to the regularity of the right hand side, regular and singular parts. The latter can be described by three types of singular functions, all related to the Laplace equation in Ω: the corresponding singularity exponents are $\lambda - 1$ with λ Dirichlet exponent, λ with λ Neumann exponent and $\lambda + 1$ with λ Dirichlet exponent.

4. Decompositions in plane polygons

We compare explicitly in a neighbourhood of a non-convex corner with opening ω, the splitting of the solution $\boldsymbol{u}$ of problem (5) in regular and singular parts, with "variational" decompositions of $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* + c\,\boldsymbol{w}$ with $\boldsymbol{u}^* \in H_N$. According to the choice of $\boldsymbol{w}$, the part $\boldsymbol{u}^*$ has different regularity properties: if $\boldsymbol{w}$ is chosen to be $\mathbf{grad}(r^{\pi/\omega}\sin\frac{\pi\theta}{\omega})$ or $\mathbf{curl}(r^{\pi/\omega}\cos\frac{\pi\theta}{\omega})$, then $\boldsymbol{u}^*$ belongs to $H^{1+\sigma}$ for $\sigma < \frac{2\pi}{\omega} - 1$; if $\boldsymbol{w}$ is chosen so that it is orthogonal to $\boldsymbol{u}^*$ in X_N (or in the space of divergence free fields in X_N), then $\boldsymbol{u}^*$ belongs to $H^{1+\sigma}$ for $\sigma < \min\{\frac{2\pi}{\omega} - 1, 1 - \frac{\pi}{\omega}\}$, which is always smaller than $\frac{1}{3}$.

---

1. Motivation

Soit Ω un ouvert borné à bord Lipschitzien dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$. Nous supposons de plus que Ω est un polyèdre (ou un polygone en dimension 2). Nous considérons sur Ω les équations de Maxwell classiques (en régime harmonique et pour un matériau homogène et isotrope) avec conditions aux limites du conducteur parfait

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} - ik\boldsymbol{H} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} + ik\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J} \quad \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\boldsymbol{E}$ représente le champ électrique, $\boldsymbol{H}$ le champ magnétique et $\boldsymbol{J}$ la densité de courant.

Les espaces naturellement associés à un tel problème sont $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ et $H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ qui sont les espaces des champs $L^2(\Omega)$ dont la divergence, resp. le rotationnel sont $L^2(\Omega)$. En effet si k est non nul et si $\boldsymbol{J}$ appartient à $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$, pour $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ seulement supposés dans $L^2(\Omega)$, les équations (1) dans Ω impliquent que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont dans $H(\mathrm{div}\,;\Omega)\cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$, ce qui donne un sens aux conditions aux limites. Soit

$$X_N = \{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega) \mid \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

et X_T l'espace correspondant pour la condition aux limites $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$: ainsi $\boldsymbol{E} \in X_N$ et $\boldsymbol{H} \in X_T$. Concentrons-nous sur $\boldsymbol{E}$. Les équations (1) impliquent la formulation variationnelle :

$$(2)\qquad \boldsymbol{E} \in X_N, \quad \forall\widetilde{\boldsymbol{E}} \in X_N, \quad \int_\Omega \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{rot}\,\widetilde{\boldsymbol{E}} - k^2\,\boldsymbol{E}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}} = ik\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}},$$

et l'équation $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{1}{ik}\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}$ sur la divergence de $\boldsymbol{E}$. Introduisant un paramètre $s > 0$ et les nouveaux seconds membres

$$(3)\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = ik\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{s}{ik}\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{J}\;\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \qquad \text{et} \qquad g = \frac{1}{ik}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}$$

nous définissons le problème variationnel coercif suivant :

$$\text{(4)} \qquad \boldsymbol{u} \in X_N, \quad \forall \boldsymbol{v} \in X_N, \quad \int_\Omega \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} + s \operatorname{div} \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - k^2\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}),$$

et sa variante point-selle qui fait intervenir un multiplicateur de Lagrange p :

$$\text{(5)} \quad \begin{array}{l} (\boldsymbol{u}, p) \in X_N \times L^2(\Omega) \\ \left\{ \begin{array}{lrcl} \forall \boldsymbol{v} \in X_N, & \displaystyle\int_\Omega \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} + s \operatorname{div} \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + p \operatorname{div} \boldsymbol{v} - k^2\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} & = & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}), \\ \forall q \in L^2(\Omega), & \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, q & = & \displaystyle\int_\Omega g\, q. \end{array} \right. \end{array}$$

Utilisant comme fonctions test les $\mathbf{grad}\,\Phi$ pour tout Φ dans $\mathring{H}^1(\Omega)$ tel que $\Delta\Phi$ appartienne à $L^2(\Omega)$, nous pouvons montrer :

THÉORÈME 1. – *Soit* $\boldsymbol{J} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ *et* $k \neq 0$ *;* $\boldsymbol{f}$ *et* g *sont définis en* (3)*.*
(i) *Si* $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ *est solution de* (1)*, alors* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{E}$ *est solution de* (4) *et* $(\boldsymbol{u}, p) = (\boldsymbol{E}, 0)$ *est solution de* (5)*.*
(ii) *Si* $\boldsymbol{u}$ *est solution de* (4) *et* k^2/s *n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet pour* $-\Delta$ *sur* Ω*, alors* $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) = (\boldsymbol{u}, \frac{1}{ik}\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u})$ *est solution de* (1)*.*
(iii) *Si* $(\boldsymbol{u}, p)$ *est solution de* (5)*, alors* $p = 0$ *et* $(\boldsymbol{u}, \frac{1}{ik}\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u})$ *est solution de* (1)*.*

2. Les singularités de l'espace variationnel

Introduisons le sous-espace de X_N des champs à composantes $H^1(\Omega)$:

$$H_N = \{\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^3 \mid \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Il est montré dans [4] que H_N est fermé dans X_N pour la norme $(\|\,\mathbf{rot}\,\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$. Si Ω n'est pas convexe (donc admet des arêtes non convexes en 3d, resp. des sommets non convexes en 2d), H_N est strictement contenu dans X_N, en vertu de la décomposition suivante [2, 3]

$$\text{(6)} \qquad \forall \boldsymbol{u} \in X_N, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* + \mathbf{grad}\,\Phi \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u}^* \in H_N, \\ \Phi \in \mathring{H}^1(\Omega),\ \Delta\Phi \in L^2(\Omega). \end{array} \right.$$

Ce phénomène revêt une grande importance en approximation numérique : si l'espace de discrétisation est contenu dans H_N, la solution discrète *n'approche pas* la solution du problème posé dans X_N.

Nous basant sur [6] où sont caractérisées les parties singulières dans $\mathring{H}^1 \setminus H^2(\Omega)$ du problème de Dirichlet, nous pouvons décrire ces "singularités variationnelles" en 3d.

Arêtes. Le long de l'arête $\boldsymbol{e}$, Ω coïncide avec $\Gamma_{\boldsymbol{e}} \times \mathbb{R}$, où

$$\Gamma_{\boldsymbol{e}} = \{(r_{\boldsymbol{e}}, \theta_{\boldsymbol{e}}) \mid r_{\boldsymbol{e}} > 0,\ 0 < \theta_{\boldsymbol{e}} < \omega_{\boldsymbol{e}}\} \quad \text{est un secteur plan.}$$

Notons $z_{\boldsymbol{e}}$ la coordonnée le long de l'arête et $d_{\boldsymbol{e}}$ une fonction $\mathscr{D}(\bar{\boldsymbol{e}})$ équivalente à la distance aux extrémités de $\boldsymbol{e}$: supposons pour fixer les idées que $z_{\boldsymbol{e}} \in (-1, +1)$ et soit $d_{\boldsymbol{e}}(z_{\boldsymbol{e}}) = 1 - z_{\boldsymbol{e}}^2$.

Les singularités sur $\Gamma_{\boldsymbol{e}}$ qui ne sont pas dans H^2 sont les seules $r_{\boldsymbol{e}}^{\pi/\omega_e} \sin \pi\theta_{\boldsymbol{e}}/\omega_{\boldsymbol{e}}$, lorsque $\omega_{\boldsymbol{e}} > \pi$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des arêtes $\boldsymbol{e}$ telles que $\omega_{\boldsymbol{e}} > \pi$. Les fonctions correspondantes dans le domaine Ω peuvent être définies comme

$$\Phi_{\boldsymbol{e}} = \chi_{\boldsymbol{e}}(\rho_{\boldsymbol{e}})\, \rho_{\boldsymbol{e}}^{\pi/\omega_e}\, \sin \frac{\pi\theta_{\boldsymbol{e}}}{\omega_{\boldsymbol{e}}} \tag{7}$$

où $\chi_{\boldsymbol{e}}$ est une troncature égale à 1 au voisinage de 0, et $\rho_{\boldsymbol{e}}$ est la fonction $r_{\boldsymbol{e}}(d_{\boldsymbol{e}})^{-1}$.

Pour décrire les coefficients de singularités le long de $\boldsymbol{e}$ nous utilisons les espaces de Sobolev à poids $\mathbb{V}^\sigma(\boldsymbol{e})$ définis pour $\sigma \in \mathbb{N}$ par

$$\mathbb{V}^\sigma(\boldsymbol{e}) = \{\gamma \in L^2(\boldsymbol{e}) \mid \quad (d_{\boldsymbol{e}})^{-1+k}\, \partial_{z_e}^k \gamma \in L^2(\boldsymbol{e}), \quad k = 0, 1, \ldots, , \sigma\}$$

et par interpolation pour σ non entier. Enfin $\mathscr{K}[\cdot]$ désigne un opérateur spécial de régularisation agissant comme un relèvement à Ω des fonctions définies sur $\boldsymbol{e}$ [1].

Coins. Au coin $\boldsymbol{c}$, Ω coïncide avec $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$, où

$$\Gamma_{\boldsymbol{c}} = \{(\rho_{\boldsymbol{c}}, \vartheta_{\boldsymbol{c}}) \mid \rho_{\boldsymbol{c}} > 0,\ \vartheta_{\boldsymbol{c}} \in G_{\boldsymbol{c}} \subset \mathbb{S}^2\} \quad \text{est un cône polyédral.}$$

La fonction la plus singulière en $\boldsymbol{c}$ est $\rho_{\boldsymbol{c}}^{\lambda_c}\, \phi_{\boldsymbol{c}}(\vartheta_{\boldsymbol{c}})$ où $\lambda_{\boldsymbol{c}} = -\frac{1}{2} + (\mu_{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{4})^{1/2}$ avec $\mu_{\boldsymbol{c}}$ la première valeur propre du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $G_{\boldsymbol{c}}$ et $\phi_{\boldsymbol{c}}$ une fonction propre associée. Si $\lambda_{\boldsymbol{c}} \leq \frac{1}{2}$, cette fonction n'est pas dans H^2 : soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des coins $\boldsymbol{c}$ possédant cette propriété et nous définissons

$$\Phi_{\boldsymbol{c}} = \chi_{\boldsymbol{c}}(\rho_{\boldsymbol{c}})\, \rho_{\boldsymbol{c}}^{\lambda_c}\, \phi_{\boldsymbol{c}}(\vartheta_{\boldsymbol{c}}) \tag{8}$$

où $\chi_{\boldsymbol{c}}$ est une troncature égale à 1 au voisinage de 0.

Théorème 2. – *Soit S_N un supplémentaire fermé de H_N dans X_N. Alors tout élément $\boldsymbol{u}$ de S_N se décompose en*

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\boldsymbol{e}\in\mathscr{E}} \mathbf{grad}(\mathscr{K}[\gamma_e]\, \Phi_{\boldsymbol{e}}) + \sum_{\boldsymbol{c}\in\mathscr{C}} \mathbf{grad}(\gamma_{\boldsymbol{c}}\, \Phi_{\boldsymbol{c}}) + \boldsymbol{u}^*, \quad \textit{avec } \boldsymbol{u}^* \in H_N, \tag{9}$$

et l'application

$$\boldsymbol{u} \ni S_N \longrightarrow (\gamma_{\boldsymbol{e}}, \gamma_{\boldsymbol{c}}) \in \prod_{\boldsymbol{e}\in\mathscr{E}} \mathbb{V}^{1-\pi/\omega_e}(\boldsymbol{e}) \ \times\ \prod_{\boldsymbol{c}\in\mathscr{C}} \mathbb{C}$$

est un isomorphisme surjectif. Inversement tout espace ayant cette propriété est un supplémentaire fermé de H_N dans X_N.

Remarquant qu'en 2d, $\mathbf{grad}(r_{\boldsymbol{e}}^{\pi/\omega_e} \sin \pi\theta_{\boldsymbol{e}}/\omega_{\boldsymbol{e}}) = -\,\mathbf{rot}(r_{\boldsymbol{e}}^{\pi/\omega_e} \cos \pi\theta_{\boldsymbol{e}}/\omega_{\boldsymbol{e}})$ et qu'en 3d, il est possible de résoudre le système

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} = \mathbf{grad}(\rho_{\boldsymbol{c}}^{\lambda_c}\, \phi_{\boldsymbol{c}}(\vartheta_{\boldsymbol{c}})), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \quad \text{dans } \Gamma_{\boldsymbol{c}}, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Gamma_{\boldsymbol{c}}$$

dans les champs homogènes de degré $\lambda_{\boldsymbol{c}}$, nous pouvons montrer :

[1] Pour le définir, introduisons $\tilde{z}_{\boldsymbol{e}} = \int_0^{z_e} (d_{\boldsymbol{e}})^{-1} dz$. Le changement de variable $z_{\boldsymbol{e}} \mapsto \tilde{z}_{\boldsymbol{e}}$ est une bijection de $\boldsymbol{e}$ sur $\mathbb{R}$ et on pose $\tilde{\gamma}(\tilde{z}_{\boldsymbol{e}}) = \gamma(z_{\boldsymbol{e}})$. Alors $\mathscr{K}[\gamma](\rho_{\boldsymbol{e}}, \theta_{\boldsymbol{e}}, z_{\boldsymbol{e}})$ est la convolution par rapport à la variable $\tilde{z}_{\boldsymbol{e}}$ de $\tilde{\gamma}$ avec $\frac{1}{\rho_e}\varphi(\frac{\tilde{z}_e}{\rho_e})$, où φ est une fonction $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale 1 (*cf* les suites régularisantes).

Corollaire 3. – *La décomposition* (9) *peut équivalemment s'écrire*

$$u = \sum_{e\in\mathscr{E}} \mathbf{rot}(\mathscr{K}[\gamma_e]\, \boldsymbol{A_e}) + \sum_{c\in\mathscr{C}} \mathbf{rot}(\gamma_c\, \boldsymbol{A_c}) + \boldsymbol{u}^*, \quad \textit{avec } \boldsymbol{u}^* \in H_N, \tag{10}$$

où $\boldsymbol{A_e}$ *et* $\boldsymbol{A_c}$ *sont des champs singuliers.*

Remarque. On a ainsi le choix entre une partie singulière à rotationnel nul (9), ou à divergence nulle (10). Ceci montre aussi que dans une décomposition de Helmholtz de $\boldsymbol{u}$ en $\mathbf{grad}\,\Psi + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}$ avec $\Psi \in \mathring{H}^1(\Omega)$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$, on a les mêmes types de singularités dans les deux morceaux.

3. Les singularités du problème point-selle de Maxwell

Utilisant les mêmes fonctions test que pour la preuve du Théorème 1, nous établissons :

Théorème 4. – *Soit* $(\boldsymbol{u}, p)$ *solution du problème* (5) *avec second membre* $(\boldsymbol{f}, g)$ *dans* $L^2(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)$ *. Alors* p *est dans* $H^1(\Omega)$ *et est solution du problème de Dirichlet* $-\Delta(p + sg) = \operatorname{div}\boldsymbol{f} + k^2 g$ *avec* $p + sg = 0$ *sur le bord* $\partial\Omega$ *.*

Remarque. Le second membre $\boldsymbol{f}$ défini en (3) appartient à $L^2(\Omega)^3$ si $\operatorname{div}\boldsymbol{J}$ est dans $\mathring{H}^1(\Omega)$.

Nous nous intéressons maintenant aux singularités de ces solutions. Selon la théorie générale [7, 6] elles sont déterminées par les solutions homogènes du système (5) avec $\boldsymbol{f} = 0$ et $g = 0$ posé sur les cônes $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$ et les secteurs $\Gamma_{\boldsymbol{e}}$. Introduisant la variable auxiliaire $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}$, ce système se décompose sur $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$ en 3 sous-systèmes dont on cherche les solutions $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi}, p)$ sous la forme $(\rho^\nu \boldsymbol{U}(\vartheta), \rho^{\nu-1}\boldsymbol{\Psi}(\vartheta), \rho^{\nu-1}P(\vartheta))$:

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{dans } \Gamma_{\boldsymbol{c}}\,, \quad \text{et } \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Gamma_{\boldsymbol{c}}\,, \tag{11}$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi} = \mathbf{grad}\,p, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0 \quad \text{dans } \Gamma_{\boldsymbol{c}}\,, \quad \text{et } \boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Gamma_{\boldsymbol{c}}\,, \tag{12}$$

$$\Delta p = 0, \quad \text{dans } \Gamma_{\boldsymbol{c}}\,, \quad \text{et } p = 0 \quad \text{sur } \partial\Gamma_{\boldsymbol{c}}\,, \tag{13}$$

ce qui permet de montrer (grâce à la régularité H^1 de p) que les singularités du problème (5) se classent en 3 types :

Type 1. $\boldsymbol{u}$ solution générale de (11) avec $\boldsymbol{\psi} = 0$: $\boldsymbol{u} = \mathbf{grad}\,\Phi$ avec Φ singularité du problème de Dirichlet ; donc $\nu = \lambda - 1$ avec $\lambda \in \Lambda^D_{\boldsymbol{c}}$, l'ensemble des $-\frac12 + (\mu + \frac14)^{1/2}$ avec μ valeur propre de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $G_{\boldsymbol{c}}$.

Type 2. $\boldsymbol{u}$ solution particulière de (11) avec $\boldsymbol{\psi}$ solution générale de (12) et $p = 0$: $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{grad}\,\Phi$ avec Φ singularité du problème de Neumann ; donc $\nu \in \Lambda^N_{\boldsymbol{c}}$, l'ensemble des $-\frac12 + (\mu + \frac14)^{1/2}$ avec μ valeur propre de Neumann pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $G_{\boldsymbol{c}}$.

Type 3. $\boldsymbol{u}$ solution particulière de (11) avec $\boldsymbol{\psi}$ solution particulière de (12) et p solution générale de (13) : p est donc une singularité du problème de Dirichlet et $\nu = \lambda + 1$ avec $\lambda \in \Lambda^D_{\boldsymbol{c}}$.

Théorème 5. – *Les exposants de singularités du problème* (5) *au coin* $\boldsymbol{c}$ *sont les* $\lambda \pm 1$ *avec* $\lambda \in \Lambda^D_{\boldsymbol{c}}$ *et les* $\lambda \in \Lambda^N_{\boldsymbol{c}}$ *; à l'arête* $\boldsymbol{e}$ *ce sont les* $\frac{k\pi}{\omega_e} \pm 1$ *and* $\frac{k\pi}{\omega_e}$ *avec* $k \geq 1$ *. On pose*

$$\sigma^D = \min\{\bigcup_{\text{coins}} \Lambda^D_{\boldsymbol{c}}\,,\ 2\} \qquad \sigma^N = \min \bigcup_{\text{coins}} \Lambda^N_{\boldsymbol{c}}\,, \qquad \sigma^E = \min_{\text{arêtes}} \frac{\pi}{\omega_{\boldsymbol{e}}}\ .$$

Soit $(\boldsymbol{u}, p)$ *la solution de* (5) *avec* $\boldsymbol{f} \in H^{s-1}(\Omega)^3$ *et* $g \in H^s(\Omega)$. *Alors*

(i) $\boldsymbol{u} \in H^\sigma(\Omega)^3$ *pour tout* σ *tel que* $\sigma \leq s+1$ *et* $\sigma < \min\{\sigma^E,\ \sigma^D + \frac{1}{2},\ \sigma^N + \frac{3}{2}\}$ *; de plus* $p \in H^\sigma(\Omega)$ *pour tout* σ *tel que* $\sigma \leq s$ *et* $\sigma < \min\{\sigma^E + 1,\ \sigma^D + \frac{3}{2}\}$ *;*

(ii) $\boldsymbol{u}$ *admet la décomposition en* $\boldsymbol{u}^* + \mathbf{grad}\,\Phi$ *avec* $\Phi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $\Delta\Phi \in H^s(\Omega)$ *et* $\boldsymbol{u}^* \in H^{\sigma+1}(\Omega)^3$ *pour tout* σ *tel que* $\sigma \leq s$ *et* $\sigma < \min\{\sigma^E,\ \sigma^D + \frac{1}{2},\ \sigma^N + \frac{1}{2}\}$.

Remarque. On obtient des résultats similaires pour le problème (4) grâce à l'introduction des variables auxiliaires $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}$ et $q = \operatorname{div} \boldsymbol{u}$.

4. Cas du polygone

Plaçons-nous dans la situation où $\boldsymbol{f} \in H^{s-1}(\Omega)^3$ et $g \in H^s(\Omega)$, sur un polygone Ω . La variable auxiliaire est le rotationnel scalaire de $\boldsymbol{u}$ et, ainsi, le type 2 disparaît. Supposons de plus que les conditions de compatibilité $\operatorname{div} \boldsymbol{f} + k^2 g = 0$ et $g \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ soient satisfaites, assurant que p est nul, *cf* Théorème 4. Cette hypothèse fait aussi disparaître les singularités de type 3. Fixons un sommet $\boldsymbol{c}$ non convexe de Ω , d'ouverture $\omega > \pi$. Au voisinage de $\boldsymbol{c}$, la solution $\boldsymbol{u}$ du problème (5) se décompose en

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\text{reg}} + \boldsymbol{u}_{\text{sing}}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{u}_{\text{reg}} \in H^{s+1} \ \text{ et } \ \boldsymbol{u}_{\text{sing}} = \sum_{0 < \frac{k\pi}{\omega} < s+1} \gamma_k \, \mathbf{grad}(r^{k\pi/\omega} \sin \tfrac{k\pi\theta}{\omega}).$$

Au voisinage de $\boldsymbol{c}$, une seule fonction singulière $\boldsymbol{w}$ est nécessaire pour compléter H_N dans X_N : on a $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* + \gamma_1 \boldsymbol{w}$. Selon le choix de $\boldsymbol{w}$, la partie résiduelle $\boldsymbol{u}^*$ dans H_N a différentes propriétés de régularité : notons λ^* son exposant de singularité minimal. Voici cinq exemples de décompositions variationnelles ;

(i) $\boldsymbol{w} = \mathbf{grad}(r^{\pi/\omega} \sin \frac{\pi\theta}{\omega})$: alors $\lambda^* = \frac{2\pi}{\omega} - 1$;

(ii) $\boldsymbol{w} = \mathbf{rot}(r^{\pi/\omega} \cos \frac{\pi\theta}{\omega})$: alors λ^* est comme en *(i)* ;

(iii) $\boldsymbol{w} = \mathbf{grad}\,\Phi$ où $\Phi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ est la solution du problème $\Delta\Phi = S_D$, avec S_D la première singularité duale du problème de Dirichlet pour le Laplacien, *cf* [8] (rappelons que S_D peut s'écrire comme la somme de $\chi(r)\, r^{-\pi/\omega} \sin \frac{\pi\theta}{\omega}$ et d'un élément de $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$) : la décomposition de $\boldsymbol{u}$ est alors orthogonale dans le sous-espace de X_N des champs à rotationnel nul ; dans ce cas $\lambda^* = \min\{\frac{2\pi}{\omega} - 1, 1 - \frac{\pi}{\omega}\}$, qui est toujours inférieur à $\frac{1}{3}$;

(iv) $\boldsymbol{w} = \mathbf{rot}\,\Phi$ où Φ est la solution du problème de Neumann $\partial_n\Phi = 0$ et $\Delta\Phi = S_N$, avec S_N la première singularité duale du problème de Neumann, *cf* [8], [1] : la décomposition de $\boldsymbol{u}$ est alors orthogonale dans le sous-espace de X_N des champs à divergence nulle; λ^* est comme en *(iii)*;

(v) La décomposition de $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{u}^*$ et $\gamma_1 \boldsymbol{w}$ est orthogonale dans X_N : si on résout le problème (4) avec $k = 0$, $\boldsymbol{u}^*$ est alors la solution du problème variationnel correspondant *posé dans* H_N ; λ^* est encore comme en *(iii)*.

Références bibliographiques

[1] F. Assous, P. Ciarlet, E. Sonnendrücker. Résolution des équations de Maxwell dans un domaine avec un coin rentrant. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* **323** (1996) 203–208.

[2] M. Birman, M. Solomyak. L^2 -theory of the Maxwell operator in arbitrary domains. *Russ. Math. Surv.* **42 (6)** (1987) 75–96.

[3] M. Birman, M. Solomyak. On the main singularities of the electric component of the electro-magnetic field in regions with screens. *St. Petersbg. Math. J.* **5 (1)** (1993) 125–139.

[4] M. Costabel. A coercive bilinear form for Maxwell's equations. *J. Math. Anal. Appl.* **157 (2)** (1991) 527–541.

[5] M. Costabel, M. Dauge. Singularities of Maxwell's equations on polyhedral domains. Preprint 96-30, Université de Rennes 1 (1996).

[6] M. Dauge. *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains – Smoothness and Asymptotics of Solutions.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341. Springer-Verlag, Berlin 1988.

[7] V. A. Kondrat'ev. Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.* **16** (1967) 227–313.

[8] M. Moussaoui. Espaces $H(\mathrm{div}, \mathrm{rot}, \Omega)$ dans un polygone plan. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* **322** (1996) 225–229.