Problèmes de transmission non coercifs dans des polygones

Monique Dauge et Benjamin Texier

1 Présentation du problème

Un problème de transmission scalaire d'ordre 2 posé sur un domaine plan borné Ω peut s'exprimer comme problème variationnel associé à une forme bilinéaire b de la forme

$$\forall\, u,\, v \in H^1(\Omega), \quad b(u,v) = \int_\Omega a\, \nabla u \nabla v,$$

où a est une fonction à valeurs matrices 2×2 définie sur $\overline{\Omega}$ et régulière par morceaux sur une partition finie (Ω_j) de Ω. Les solutions de tels problèmes satisfont des conditions de saut sur leurs dérivées normales aux interfaces entre les sous-domaines Ω_j où a est discontinue. De tels problèmes sont liés aux équations de Maxwell dans des matériaux hétérogènes.

Si la fonction a satisfait une condition de positivité uniforme du type

$$\exists \rho_0, \rho_1 > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \qquad \rho_0 |\xi|^2 \leq (a(x)\xi \cdot \bar{\xi}) \leq \rho_1 |\xi|^2$$

la forme b est coercive sur $H^1(\Omega)$, et le problème de transmission peut être qualifié d'*elliptique*.

Par contre se présente aussi la situation, en liaison avec l'application aux équations de Maxwell pré-citée (intervention de matériau supra-conducteur), où a est positif dans certains sous-domaines et négatif dans les autres. Ici se pose alors la question de l'ellipticité du problème de transmission, en plus du comportement de la solution au voisinage des éventuelles irrégularités de la frontière des Ω_j.

Ici, nous allons, dans un cadre très simple, étudier ces questions, à savoir l'ellipticité la long d'une interface régulière ainsi que le comportement au voisinage d'un coin entre deux sous-domaines. Ainsi, nous considérons comme domaine un rectangle Ω qui se décompose en 2 sous-domaines Ω_- et Ω_+, où $\overline{\Omega}_-$ est un rectangle contenu dans Ω, et Ω_+ son complémentaire.

On s'intéresse à la résolution du problème de transmission avec condition de Dirichlet extérieure :

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega a\, \nabla u \nabla v - f\, v = 0, \tag{1.1}$$

où a est une fonction constante par morceaux:

$$a = \begin{cases} a_+\,\mathrm{Id} & \text{dans } \Omega_+ \\ a_-\,\mathrm{Id} & \text{dans } \Omega_-, \end{cases}$$

et où le second membre f est supposé appartenir à $L^2(\Omega)$.

L'étude qui suit traite le cas $a_-\, a_+ < 0$, le cas $a_-\, a_+ > 0$ étant bien connu, voir NICAISE [3]. Etant donnée $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (1.1), on se propose d'en étudier la structure, la difficulté venant de $a_-\, a_+ < 0$ et de la présence des coins.

On notera u_+ pour $u|_{\Omega_+}$ et u_- pour $u|_{\Omega_-}$. D'après (1.1):

$$\forall\, v \in \mathscr{D}(\Omega_+), \quad -\int_{\Omega_+} a_+\, \Delta u_+\, v = \int_{\Omega_+} f_+\, v.$$

Donc:

$$-a_+ \Delta u_+ = f_+,$$

et, de même: $-a_- \Delta u_- = f_-$. Alors, si on intègre (1.1) par parties, on obtient, pour tout $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ la condition suivante sur l'interface $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$ (qui est égale à $\partial\Omega_-$) entre Ω_+ et Ω_- :

$$\int_{\partial\Omega_-} (a_+ \partial_{n_+} u_+ + a_- \partial_{n_-} u_-)\, v = 0. \tag{1.2}$$

La solution u n'étant a priori que dans $H^1(\Omega)$, (1.2) a seulement un sens comme dualité entre $H^{-1/2}(\partial\Omega_-)$ et $H^{1/2}(\partial\Omega_-)$. L'étude qui suit montre qu'en réalité, u est H^2 , sauf peut-être au voisinage des coins, ce qui donne un sens usuel de trace aux dérivées normales.

Après le choix d'une normale ($\partial_n = \partial_{n_+}$, par exemple), on obtient la condition dite de transmission:

$$a_+\, \partial_n u_+ \,-\, a_-\, \partial_n u_- = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_- .$$

Il résulte de l'ellipticité du Laplacien que u_+ est dans $H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega_+)$ et u_- dans $H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega_-)$. La condition de Dirichlet étant elliptique, on a aussi la régularité H^2 pour u au voisinage de tout point du bord externe $\partial\Omega$ qui ne rencontre pas l'un des sommet de Ω . De plus, comme les angles de Ω sont $\pi/2$, le principe de réflexion (et aussi la théorie générale du Laplacien dans un polygone, voir GRISVARD [1]) montre que u est aussi H^2 au voisinage des coins de Ω . Il reste donc à étudier u au voisinage des points de l'interface $\partial\Omega_-$.

Dans la section 2, on va montrer que si $a_+ a_- \neq -1$, u_+ et u_- ont la régularité H^2 au voisinage de tout point régulier de l'interface. Dans la section 3, on va montrer que, sous la même condition $a_+a_- \neq -1$, le comportement de u au voisinage des coins de Ω_- (interface à coin) relève de la théorie générale des problèmes elliptiques dans les ouverts à coins: selon la valeur du rapport $\mu := a_+/a_-$, on obtiendra, soit la régularité H^2 de u_+ et u_-, soit une décomposition en parties régulière et singulière. Nous concluons en section 4 par quelques persepectives.

2 Etude au voisinage d'une interface

On se place maintenant au voisinage d'un point de $\partial\Omega_-$ qui ne rencontre aucun coin. Dans une première partie, on tronque u pour pouvoir se placer dans $\mathbb{R}^2$ tout entier. Puis, par transformation de Fourier partielle et un changement de variable, on aboutit à l'étude d'un problème à une dimension. On déduit de son étude une propriété de régularité locale pour u.

2.1 Localisation

Soit (x_0, y_0) un point de l'interface: on suppose que l'interface est localement contenue dans la droite d'équation $y = y_0$. Soit $\chi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, valant 1 au voisinage de 0 et à support suffisamment petit et soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\chi(x,y) = \chi_0(x-x_0)\,\chi_0(y-y_0)$. Alors, pour $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega a\nabla(\chi u)\nabla v = \int_\Omega a\big(\nabla u\nabla(\chi v) + u\nabla\chi\nabla v - v\nabla u\nabla\chi\big).$$

En intégrant par parties:

$$\int_{\Omega_+} a_+u\nabla\chi\nabla v = -\int_{\Omega_+} \operatorname{div}(a_+u\nabla\chi)\,v + \int_{\partial\Omega_+} a_+uv\,\partial_n\chi,$$

et de même sur Ω_-. Par choix de χ, $\partial_n\chi = 0$. On a donc:

$$\int_\Omega a\,\nabla(\chi u)\,\nabla v = \int_\Omega \big(\chi f + a\nabla u\nabla\chi + \operatorname{div}(a\,u\nabla\chi)\big)\,v.$$

Or, $\operatorname{div}(a\,u\nabla\chi) = \partial_x(a\,u\,\partial_x\chi) + \partial_y(a\,u\,\partial_y\chi) = a\big(\partial_x(u\,\partial_x\chi) + \partial_y(u\,\partial_y\chi)\big)$, car $\partial_y\chi = 0$ à l'interface. Par suite, comme $u \in H^1(\Omega)$, la fonction g définie par $g = \chi f + a\nabla u\nabla\chi + \operatorname{div}(a\,u\nabla\chi)$ est dans $L^2(\Omega)$. Ainsi:

$$\forall\, v \in H^1_0(\Omega), \quad \int_\Omega a\nabla(\chi u)\nabla v = \int_\Omega g\,v.$$

Donc, si on note $\tilde u$ le prolongement de χu par 0 à tout $\mathbb{R}^2$ et de même $\tilde g$ le prolongement de g par 0, et en posant $(x_0, y_0) = (0,0)$, et $\tilde a = \begin{cases} a_+ & \text{pour } y > 0 \\ a_- & \text{pour } y < 0 \end{cases}$:

$$\forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \tilde a\,\nabla\tilde u\,\nabla v = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde g\,v. \tag{2.1}$$

2.2 Régularité

On part maintenant de l'équation (2.1), et on renote $\tilde{u}$ par u et $\tilde{g}$ par g dans cette sous-section 2.2. En procédant comme dans la section 1, on voit que u vérifie les équations:

$$\begin{cases} -a_+ \, \Delta u_+ = g_+ & \text{pour } y > 0, \\ -a_- \, \Delta u_- = g_- & \text{pour } y < 0. \end{cases}$$

Appliquons la transformation de Fourier partielle par rapport à x :

$$a_+ \, (\xi^2 - \partial_y^2) \, \hat{u}_+(\xi, y) = \hat{g}_+(\xi, y), \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+,$$

de même pour $y < 0$. En effectuant le changement de variable $\tilde{y} = |\xi| \, y$ (et où $\tilde{y}$ est immédiatement renoté y), on a :

$$a_\pm \, (1 - \partial_y^2) \, \hat{u}_\pm(\xi, \frac{y}{|\xi|}) = \frac{1}{\xi^2} \, \hat{g}_\pm(\xi, \frac{y}{|\xi|}).$$

Le changement de variable précédent permet ainsi de fixer $\xi = 1$. On considère maintenant un problème à une dimension, la variable étant y.

Notons $h(y) = \frac{1}{\xi^2} \hat{g}(\xi, \frac{y}{|\xi|})$, et $E = H^1(\mathbb{R}) \cap \big(H^2(\mathbb{R}_-) \times H^2(\mathbb{R}_+) \big)$ i.e.

$$E = \big\{ w \in H^1(\mathbb{R}) \mid \quad w_- \in H^2(\mathbb{R}_-) \quad \text{et} \quad w_+ \in H^2(\mathbb{R}_+) \big\}.$$

On s'intéresse au problème :

$$\text{Trouver } w \in E \text{ tel que } \forall \, v \in H^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \tilde{a} \, (w \, v + \nabla w \, \nabla v) - h \, v \; = 0. \tag{2.2}$$

Supposons connaître $w \in E$ vérifiant (2.2). Alors, en choisissant v dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}_+)$ et en intégrant par parties, on obtient comme dans la section 1:

$$a_+ \, (w_+ - w_+'') = h_+ \quad \text{et} \quad a_- \, (w_- - w_-'') = h_-.$$

En reprenant (2.2), on obtient la condition de transmission:

$$a_+ \, w_+'(0) \; - \; a_- \, w_-'(0) \; = \; 0 \, .$$

Considérons alors la solution $w_0 = (w_{0,-}, w_{0,+}) \in H_0^1(\mathbb{R}_-) \times H_0^1(\mathbb{R}_+)$ du problème de Dirichlet:

$$a_-(w_{0,-} - w_{0,-}'') = h_- \, , \quad a_+(w_{0,+} - w_{0,+}'') = h_+.$$

On sait que $w_{0,-} \in H^2(\mathbb{R}_-)$ et $w_{0,+} \in H^2(\mathbb{R}_+)$. Si on pose $w_1 = w - w_0$, alors nécessairement:

$$\begin{cases} w_{1,-} - w_{1,-}'' = 0, \quad w_{1,+} - w_{1,+}'' = 0, \\ w_{1,-}(0) = w_{1,+}(0), \\ a_+ \, w_{1,+}'(0) - a_- \, w_{1,-}'(0) = a_- \, w_{0,-}'(0) - a_+ \, w_{0,+}'(0). \end{cases}$$

En posant $\alpha = a_- \, w'_{0,-}(0) - a_+ \, w'_{0,+}(0)$, on a nécessairement, si $a_+ + a_- \neq 0$:

$$w_{1,\pm} = \frac{\alpha}{a_+ + a_-} \, e^{\mp y}. \tag{2.3}$$

D'où l'unicité de la solution de (2.2). Réciproquement, en posant (2.3) et $w = w_0 + w_1$, w est solution de (2.2), d'où l'existence.

Alors, notant $\tilde{E} = H^1(\mathbb{R}) \cap \big\{ v \in H^2(\mathbb{R}_-) \times H^2(\mathbb{R}_+) \, , \, a_+ \, v'_+(0) - a_- \, v'_-(0) = 0 \big\}$, si $a_+ + a_- \neq 0$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}_-) \times L^2(\mathbb{R}_+) \\ v & \longrightarrow & (v_- - v''_- \, , \, v_+ - v''_+) \end{array}$$

est linéaire, continue, bijective d'après ce qui précède, donc ouverte. D'après le théorème de Banach:

$$\exists \, C > 0, \quad \|w_\pm\|_{H^2(\mathbb{R}_\pm)} \leqslant C \left(\|h_-\|_{L^2(\mathbb{R}_-)} + \|h_+\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \right). \tag{2.4}$$

Avec (2.4), il suffit maintenant de remonter les calculs précédents pour obtenir le résultat de régularité annoncé. En se plaçant par exemple au-dessus de l'interface:

$$\|w_+\|^2_{H^2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \, \|h\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \, .$$

On applique ceci pour $w(y) = \hat{u}(\xi, \frac{y}{|\xi|})$ et $h(y) = \frac{1}{\xi^2} \hat{g}(\xi, \frac{y}{|\xi|})$. Or,

$$\|\partial_y^j w_+\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = |\xi|^{1-2j} \int_{\mathbb{R}_+} |\partial_y^j \hat{u}|^2 \, \mathrm{d}y \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, 2.$$

Donc

$$\|\xi^2 \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\xi \partial_y \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\partial_y^2 \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \, \|\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R})} \, . \tag{2.5}$$

Or la caractérisation de $H^2(\mathbb{R}^2_+)$ par transformation de Fourier partielle est

$$\|v\|^2_{H^2(\mathbb{R}^2_+)} \simeq \int_{\mathbb{R}_+} \|v(\xi, \cdot)\|^2_{H^2(\mathbb{R}_+, \, |\xi|)} \, \mathrm{d}\xi \tag{2.6}$$

où la norme à paramètre $\| \cdot \|_{H^2(\mathbb{R}_+, \, \rho)}$ est définie pour $\rho \geqslant 0$ et $z \in H^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\|z\|^2_{H^2(\mathbb{R}_+, \, \rho)} = \|(1+\rho)^2 z\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|(1+\rho) \, \partial z\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\partial^2 z\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \, . \tag{2.7}$$

L'espace $H^1(\mathbb{R}^2_+)$ a bien sûr une caractérisation analogue. Pour ρ grand:

$$\|z\|^2_{H^2(\mathbb{R}_+, \, \rho)} \simeq \|\rho^2 z\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\rho \, \partial z\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\partial^2 z\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \, .$$

Pour les ρ petits, il reste un terme H^1 à droite. Donc (2.5) donne:

$$\|\hat{u}(\xi, \cdot)\|^2_{H^2(\mathbb{R}_+, \, |\xi|)} \leqslant C \left(\|\hat{g}(\xi, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\hat{u}(\xi, \cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R}_+, \, |\xi|)} \right).$$

Ainsi, déduit-on de (2.6) que:

$$\|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^2_+)} \leqslant C\left(\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2_+)}\right). \tag{2.8}$$

Revenant à la situation antérieure de u solution du problème (1.1), et combinant (2.8), valable pour χu, avec les estimations elliptiques classiques au voisinage des points intérieurs de $\Omega_\pm$ et des points réguliers de $\partial\Omega$, et les estimations de régularité au voisinage des coins externes de $\partial\Omega$, nous obtenons:

Théorème 2.1 *On suppose que* $a_+a_- \neq -1$. *Soit* $u \in H^1_0(\Omega)$*, solution du problème* (1.1)*. Soit* Ω_1 *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $\overline{\Omega}_1$ *ne rencontre pas les coins de transmission (les coins de* Ω_-*), et soit* Ω_2 *tel que* $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. *On note* $\Omega_{1,\pm} = \Omega_\pm \cap \Omega_1$. *Alors* $u = (u_-, u_+) \in H^2(\Omega_{1,-}) \times H^2(\Omega_{1,+})$*, avec les estimations:*

$$\|u_\pm\|_{H^2(\Omega_{1,\pm})} \leqslant C\left(\|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{H^1(\Omega_2)}\right).$$

3 Etude au voisinage d'un coin intérieur

Dans une première partie, on tronque u à nouveau, afin de se placer au voisinage d'un coin de transmission, où Ω_- et Ω_+ coïncident respectivement avec un voisinage de 0 des secteurs Γ_- et Γ_+ qui forment une décomposition de $\Gamma = \mathbb{R}^2$: en coordonnées polaires (r, θ),

$$\Gamma_- = \big\{(x,y),\, r \in \mathbb{R}_+,\, \theta \in (0, \pi/2)\big\}, \quad \Gamma_+ = \big\{(x,y),\, r \in \mathbb{R}_+,\, \theta \in (\pi/2, 2\pi)\big\}.$$

Puis, avec $h = r^2 g$ où $g \in L^2(\Gamma)$ est un nouveau second membre après localisation, l'étude du symbole Mellin $\mathscr{L}(\lambda)$ de notre problème de transmission au voisinage de 0 va fournir un u_0 de régularité H^2 dans un voisinage de 0, tel que:

$$\mathscr{L}(\lambda)\, \hat{u}_0(\lambda) = \hat{h}(\lambda)$$

pour tout λ sur une certaine droite $\operatorname{Re}\lambda =$ constante. Une extension de la formule des résidus permet alors comparer u_0 et u.

Dans toute la section 3, on note $z_- = z|_{\Gamma_-}$ et $z_+ = z|_{\Gamma_+}$, pour toute fonction z définie sur $\mathbb{R}^2$, et aussi $G_- = (0, \pi/2)$, $G_+ = (\pi/2, 2\pi)$ et G le cercle unité $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

3.1 Localisation

Soit $r \mapsto \chi(r),\ \chi \in \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, à support compact, et qui vaut 1 au voisinage de 0. Alors, $\partial_\theta \chi = 0$. Avec un tel χ, on peut reprendre les calculs de la sous-section 2.1, pour obtenir:

$$\int_\Omega a\, \nabla(\chi u)\, \nabla v = \int_\Omega \big(\chi f + a\nabla u \nabla\chi + \operatorname{div}(a\, u \nabla\chi)\big)\, v.$$

Or, $\operatorname{div}(a\,u\nabla\chi) = \partial_r(a\,u\,\partial_r\chi)$ par choix de χ, donc $g = \chi f + a\nabla u\nabla\chi + \operatorname{div}(a\,u\nabla\chi)$ est dans $L^2(\Omega)$. Après prolongement par zéro :

$$\forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{a}\,\nabla\tilde{u}\,\nabla v = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}\,v\,, \tag{3.1}$$

où $\tilde{a}$ est égal à a_+ sur Γ_+ et à a_- sur Γ_-.

3.2 Transformation de Mellin et espaces à poids

La transformation de Mellin est une transformation de Fourier–Laplace (i.e. à argument complexe) radiale. Elle caractérise particulièrement bien les espaces à poids suivants dont l'introduction est classique dans la théorie des problèmes à coins, voir KONDRAT'EV [2]. Dans cette sous-section, Γ désigne un secteur plan:

$$\Gamma = \big\{(x,y),\, r \in \mathbb{R}_+,\, \theta \in G\big\}.$$

Definition 3.1 *Soit $s \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$,*

$$K^s_\gamma(\Gamma) = \big\{v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Gamma), \quad r^{|\alpha|-s+\gamma}\partial^\alpha_x v \in L^2(\Gamma),\ \forall\,\alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leqslant s\big\}$$

avec la norme $\|v\|^2_{K^s_\gamma(\Gamma)} = \sum_{|\alpha|\le s} \|r^{|\alpha|-s+\gamma}\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\Gamma)}$.

Pour $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+)$, la transformation de Mellin de v est notée $\hat{v}$ et est définie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ par la formule

$$\hat{v}(\lambda) = \int_0^{+\infty} r^{-\lambda}\,v(r)\,\frac{\mathrm{d}r}{r}\,.$$

Si on pose $t = \log r$, $\breve{v}(t) = v(r)$, et $\lambda = \xi + i\eta$, alors $\hat{v}(\lambda)$ est la transformée de Fourier de $t \mapsto e^{-\xi t}\,\breve{v}(t)$ calculée en η.

Si $v \in \mathscr{D}(\overline{\Gamma} \setminus \{0\})$, v s'écrit en coordonnées polaires $v(x) = \tilde{v}(r,\theta)$, et on définit alors la transformée de Mellin de v par la formule:

$$\hat{v}(\lambda,\theta) = \int_0^{+\infty} r^{-\lambda}\,\tilde{v}(r,\theta)\,\frac{\mathrm{d}r}{r}\,.$$

L'égalité de Parseval permet de démontrer:

Lemme 3.2 *Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\xi = -\gamma - 1$. Si $v \in K^0_\gamma(\Gamma)$, alors la transformation de Mellin de v est bien définie pour tout $\lambda = \xi + i\eta$, $(\eta \in \mathbb{R})$, et*

$$(\eta,\theta) \mapsto \hat{v}(\xi + i\eta, \theta) \in L^2(\mathbb{R} \times G).$$

La réciproque est vraie et on a l'équivalence:

$$\|v\|_{K^0_\gamma(\Gamma)} \simeq \Big(\int_{\mathbb{R}} \|\hat{v}(\xi + i\eta)\|^2_{L^2(G)}\,\mathrm{d}\eta\Big)^{1/2}.$$

En étudiant l'effet du changement de variables $x \mapsto (r,\theta) \mapsto (t,\theta)$ sur les opérateurs de dérivation, on peut étendre le lemme précédent aux espaces $K^s_\gamma(\Gamma)$ pour $s \in \mathbb{N}$:

Lemme 3.3 *Soit* $\gamma \in \mathbb{R}$ *et* $s \in \mathbb{N}$ *, on pose* $\xi = s - \gamma - 1$ *.*

- *Si* $v \in K^s_\gamma(\Gamma)$ *, alors* $\eta \mapsto \hat{v}(\xi + i\eta, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}, H^s(G))$ *.*
  Plus précisément, on a l'équivalence:

$$\|v\|_{K^s_\gamma(\Gamma)} \simeq \Big(\int_{\mathbb{R}} \|\hat{v}(\xi + i\eta)\|^2_{H^s(G,\,|\eta|)}\,\mathrm{d}\eta\Big)^{1/2}$$

où pour $\rho > 0$ *,*

$$\|v\|^2_{H^s(G,\,\rho)} = \sum_{\beta_1+\beta_2=s} \|(1+\rho)^{\beta_1}\partial^{\beta_2} v\|^2_{L^2(G)}\,.$$

- *Réciproquement, si* $V(\lambda)$ *est définie pour* $\operatorname{Re}\lambda = \xi$ *de sorte que* $\eta \mapsto V(\xi+i\eta,\cdot)$ *soit dans* $L^2(\mathbb{R}, H^s(G))$ *avec la condition*

$$\int_{\mathbb{R}} \|V(\xi + i\eta)\|^2_{H^s(G,\,|\eta|)}\,\mathrm{d}\eta < \infty$$

alors, pour tout λ *de partie réelle égale à* ξ *,* $V(\lambda)$ *est la transformée de Mellin d'une fonction* $v \in K^s_\gamma(\Gamma)$ *, et on a:*

$$\tilde{v}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} r^\lambda V(\lambda,\theta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{3.2}$$

3.3 Inversibilité du symbole Mellin

On repart maintenant du problème (3.1) où on renote $\tilde{u}$ par u et $-\tilde{g}$ par g. Intégrant par parties, on obtient que:

$$\begin{cases} a_\pm \Delta u_\pm = g_\pm & \text{dans } \Gamma_\pm, \\ a_+\partial_n u_+ - a_-\partial_n u_- = 0 & \text{sur } \partial\Gamma_+ \cap \partial\Gamma_-, \end{cases} \tag{3.3}$$

avec $u \in H^1(\Gamma) \cap \big(H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Gamma}_- \setminus \{0\}) \times H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Gamma}_+ \setminus \{0\})\big)$, *cf* Théorème 2.1, et $g \in L^2(\Gamma)$, tous deux à support compact.

En appliquant la transformation de Mellin au problème (3.3), on obtient l'expression de $\mathscr{L}(\lambda)$:

$$\begin{array}{llll} \mathscr{L}(\lambda) \ : & \hat{E} & \longrightarrow & L^2(G_-) \times L^2(G_+) \\ & W & \longrightarrow & \big(a_-(\lambda^2 + \partial_\theta^2)W_-\,,\ a_+(\lambda^2 + \partial_\theta^2)W_+\big) \end{array}$$

où $\hat{E} = H^1(G) \cap \big\{W \in H^2(G_-) \times H^2(G_+)\,,\ a_+ W'_+ - a_- W'_- = 0 \text{ sur } \partial G_- \cap \partial G_+\big\}$.

On se fixe $\lambda \in \mathbb{C}$. On étudie l'inversibilité de $\mathscr{L}(\lambda)$.

Injectivité: Soit $W \in \hat{E}$ tel que $\mathscr{L}(\lambda)W = 0$. On a donc les conditions de transmission:

$$\begin{cases} W_+(2\pi) - W_-(0) &=& 0, \\ a_+W'_+(2\pi) - a_-W'_-(0) &=& 0, \\ W_+(\omega) - W_-(\omega) &=& 0, \\ a_+W'_+(\omega) - a_-W'_-(\omega) &=& 0, \end{cases}$$

où $\omega = \frac{\pi}{2}$, la première et la troisième provenant du fait que $W \in H^1(G)$. Par ailleurs, $\mathscr{L}(\lambda)W = 0$ donne aussi :

$$\forall\, \theta \notin \{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}, \quad (\lambda^2 + \partial_\theta^2)W = 0,$$

donc il existe $\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+$ tels que $W_-(\lambda) = \alpha_- \cos(\lambda\,\theta) + \beta_- \sin(\lambda\,\theta)$ et de même $W_+(\lambda) = \alpha_+ \cos(\lambda\,\theta) + \beta_+ \sin(\lambda\,\theta)$. En injectant ces solutions dans le système précédent, on obtient: $\mathscr{L}(\lambda)$ est injectif $\Longleftrightarrow \mathscr{A}(\lambda) \neq 0$, où, en posant $\mu = a_+/a_-$:

$$\mathscr{A}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cos 2\pi\lambda & \sin 2\pi\lambda \\ 0 & -1 & -\mu\,\sin 2\pi\lambda & \mu\,\cos 2\pi\lambda \\ -\cos\lambda\omega & -\sin\lambda\omega & \cos\lambda\omega & \sin\lambda\omega \\ \sin\lambda\omega & -\cos\lambda\omega & -\mu\,\sin\lambda\omega & \mu\,\cos\lambda\omega \end{vmatrix}.$$

On obtient immédiatement que

$$\mathscr{A}(\lambda) = (\mu^2+1)\,\sin\lambda\omega\,\sin\lambda(2\pi-\omega) + 2\mu\,\big(1 - \cos\lambda\omega\,\cos\lambda(2\pi-\omega)\big),$$

dont on peut montrer qu'il est égal à

$$\mathscr{A}(\lambda) = (b+c)(b-c), \quad \text{où} \quad b = (\mu+1)\,\sin\lambda\pi \ \text{ et } \ c = (\mu-1)\,\sin\lambda(\pi-\omega).$$

Surjectivité: On aboutit au même déterminant d'ordre deux. Donc $\mathscr{L}(\lambda)$ est injectif si et seulement si $\mathscr{L}(\lambda)$ est surjectif. On a ainsi obtenu

Lemme 3.4 *Si $\lambda \neq 0$, $\mathscr{L}(\lambda)$ est bijectif si et seulement si*

$$(\mu+1)\,\sin\lambda\pi \;\neq\; \pm\,(\mu-1)\,\sin\lambda(\pi-\omega), \quad \textit{avec} \quad \mu = a_+/a_-. \tag{3.4}$$

Ici $\omega = \pi/2$ et cette valeur particulière permet de montrer la propriété suivante, qui sera utile pour la décomposition de u :

Lemme 3.5 *Si μ est réel et $\mu \neq 1$, pour tout λ, $\operatorname{Re}\lambda = 1$, $\mathscr{L}(\lambda)$ est inversible.*

DÉMONSTRATION. En effet pour $\lambda = 1 + i\eta$, la condition (3.4) s'écrit

$$-i(\mu+1)\,\operatorname{sh}\eta\pi \;\neq\; \pm\,(\mu-1)\,\operatorname{ch}(\eta\pi/2),$$

dont la seule racine est $\mu = 1$, $\eta = 0$ (problème de transmission trivial). ∎

3.4 Calcul des résidus

Pour analyser une solution u du problème (1.1) au voisinage d'un coin de transmission, on se place dans le cadre du problème (3.3), auquel on applique la transformation de Mellin. Pour cela, on se ramène à des espaces à poids $K^s_\gamma[\Gamma)$, voir Définition 3.1. On remarque d'abord que, comme conséquence de l'inégalité de Hardy, les fonctions dans $H^1(\Gamma)$ à support compact appartiennent à $K^1_\varepsilon(\Gamma)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On se fixe donc $\varepsilon > 0$, que l'on pourra choisir aussi petit que l'on veut et donc, $u \in K^1_\varepsilon(\Gamma)$. Alors, par le Lemme 3.3, appliqué à Γ_- et Γ_+ on obtient que pour tout $\lambda,\ \mathrm{Re}\,\lambda = -\varepsilon$, $\hat{u}(\lambda)$ est bien définie et on a, en posant $h = r^2 g$:

$$\forall\,\lambda,\ \mathrm{Re}\,\lambda = -\varepsilon, \quad \mathscr{L}(\lambda)\,\hat{u}(\lambda) = \hat{h}(\lambda).$$

On rappelle que

$$\hat{E} = H^1(G) \cap \Big\{ W \in H^2(G_-) \times H^2(G_+)\,, \quad \begin{aligned} & a_+ W'_+(2\pi) - a_- W'_-(0) = 0, \\ & a_+ W'_+(\tfrac{\pi}{2}) - a_- W'_-(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \end{aligned} \Big\}$$

et que $\mathscr{L}(\lambda)$ est inversible de $\hat{E}$ dans $L^2(G)$ si et seulement si la condition (3.4) est vérifiée. On voit ainsi que l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\mathscr{L}(\lambda)$ soit inversible pour tout λ, $\mathrm{Re}\,\lambda \in [-\varepsilon, 0)$.

Grâce au Théorème 2.1, on va démontrer une estimation sur l'inverse de $\mathscr{L}(\lambda)$:

Lemme 3.6 *On suppose que* $a_+ a_- \neq -1$. *Soit* $\xi \in \mathbb{R}$. *Alors il existe* η_0 *et* C *dans* $\mathbb{R}_+$ *telles que*

$$\forall\, V \in \hat{E},\ \forall\,\lambda = \xi + i\eta \text{ avec } |\eta| \geqslant \eta_0, \quad \|V\|_{H^2(G_\pm,\,|\eta|)} \leqslant C\,\|\mathscr{L}(\lambda)\,V\|_{L^2(G)}\,.$$

DÉMONSTRATION. On va l'obtenir par la méthode d'addition d'une variable en partant de l'estimation a priori obtenue dans le Théorème 2.1: pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$, solution du problème (1.1) avec second membre dans $L^2(\Omega)$:

$$\|v_\pm\|_{H^2(\Gamma_{1,\pm})} \leqslant C\left(\|a_+\Delta v_+\|_{L^2(\Gamma_{2,+})} + \|a_-\Delta v_-\|_{L^2(\Gamma_{2,-})} + \|v\|_{H^1(\Gamma_2)}\right) \tag{3.5}$$

avec Γ_1 et Γ_2 deux couronnes emboîtées (par exemple Γ_j est l'ensemble des points tels que $r \in (2^{-j}, 2^j)$). On prend $v = \chi r^\lambda V$, avec χ à support dans Γ_2 et valant 1 sur Γ_1 et par un calcul en coordonnées polaires on obtient:

$$\|a_\pm \Delta v_\pm\|_{L^2(\Gamma_{2,\pm})} \leqslant C\left(\|\mathscr{L}(\lambda)\,V_\pm\|_{L^2(G)} + \|V\|_{H^1(G,\,|\eta|)}\right),$$

et

$$\|v_\pm\|_{H^2(\Gamma_{1,\pm})} \geqslant c\,\|V_\pm\|_{H^2(G_\pm,\,|\eta|)} - M\,\|V\|_{H^1(G,\,|\eta|)}\,,$$

les intégrales en r disparaissant par choix du support de χ et le terme $\|V\|_{H^1(G,|\eta|)}$ provenant des dérivées de χ. En utilisant (3.5) et les deux inégalités précédentes, on obtient:

$$\|V_\pm\|_{H^2(G_\pm,|\eta|)} \leq d_1 \|\mathscr{L}(\lambda)\, V\|_{L^2(G)} + d_2 \|V\|_{H^1(G,|\eta|)} .$$

Or

$$\|V\|_{H^1(G,|\eta|)} \leqslant \frac{1}{|\eta|+1}\big(\|V_-\|_{H^2(G_-,|\eta|)} + \|V_+\|_{H^2(G_+,|\eta|)}\big).$$

Ainsi pour $|\eta|$ assez grand, $d_2\|V\|_{H^1(G,|\eta|)}$ se majore par la moitié du membre de gauche de l'avant-dernière estimation, ce qui permet de prouver le lemme. ∎

Nous pouvons en déduire le

Théorème 3.7 *On suppose que* $a_+a_- \neq -1$. *Soit* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tel que la condition* (3.4) *soit satisfaite sur la droite* $\operatorname{Re}\lambda = 1-\gamma$. *Alors le problème de transmission* $w \mapsto p$

$$\begin{cases} a_\pm \Delta w_\pm = p_\pm & \textit{dans } \Gamma_\pm, \\ w_+ - w_- = 0 & \textit{sur } \partial\Gamma_+ \cap \partial\Gamma_-, \\ a_+\partial_n w_+ - a_-\partial_n w_- = 0 & \textit{sur } \partial\Gamma_+ \cap \partial\Gamma_-, \end{cases} \tag{3.6}$$

induit un isomorphisme de

$$E_\gamma := K^1_{\gamma-1}(\Gamma) \cap \big(K^2_\gamma(\Gamma_-) \times K^2_\gamma(\Gamma_+)\big) \longrightarrow K^0_\gamma(\Gamma).$$

Son inverse $p \mapsto w$ *est donné par la formule, cf* (3.2)

$$\tilde{w}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} r^{\xi+i\eta}\mathscr{L}(\xi+i\eta)^{-1}\hat{q}(\xi+i\eta)\,\mathrm{d}\eta, \quad \textit{où } \xi = 1-\gamma \textit{ et } q = r^2 p\,. \tag{3.7}$$

DÉMONSTRATION. Si $w \in E_\gamma$ satisfait le problème de transmission (3.6) avec $p = 0$, alors

$$\forall\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda = 1-\gamma, \quad \mathscr{L}(\lambda)\,\hat{w}(\lambda) = 0.$$

L'unicité provient alors de l'injectivité de $\mathscr{L}(\lambda)$ sur la droite $\operatorname{Re}\lambda = 1-\gamma$.

Appliquons le lemme 3.6 à la fonction $V(\lambda) := \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{q}(\lambda)$ avec $\operatorname{Re}\lambda = \xi = 1-\gamma$:

$$\|V(\lambda)\|_{H^2(G_\pm,|\operatorname{Im}\lambda|)} \leqslant C\|\mathscr{L}(\lambda)\,V(\lambda)\|_{L^2(G)}\,,$$

pour $|\operatorname{Im}\lambda| > \eta_0$. Mais pour $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \eta_0$, l'inversibilité de $\mathscr{L}(\lambda)$ et la continuité de l'inverse par rapport à λ permet aussi d'avoir l'estimation ci-dessus. D'où:

$$\int_{\mathbb{R}} \|V(\xi+i\eta)\|^2_{H^2(G_\pm,|\eta|)}\,\mathrm{d}\eta \leqslant C\int_{\mathbb{R}} \|\hat{q}(\xi+i\eta)\|^2_{L^2(G)}\,\mathrm{d}\eta.$$

Le majorant est fini, car $(\eta,\theta) \mapsto \hat{q}(\xi+i\eta) \in L^2(\mathbb{R}\times G)$ par le lemme 3.3. Donc

$$(\eta,\theta) \mapsto V(\xi+i\eta,\theta) \in L^2(\mathbb{R}, H^2(G_\pm)),$$

et on conclut alors, toujours par le lemme 3.3. ■

Nous avons immédiatement les deux conséquences suivantes pour notre problème de transmission initial (3.3):

Corollaire 3.8 *Pour* $\varepsilon > 0$ *tel que la condition* (3.4) *soit satisfaite sur la droite* $\operatorname{Re}\lambda = -\varepsilon$*, la solution* u *du problème* (3.3) *est telle que* u *appartient à* $K^2_{1+\varepsilon}(\Gamma_\pm)$*.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le Théorème 3.7 pour $\gamma = 1 + \varepsilon$, car comme le second membre g est $L^2(\Gamma)$ à support compact, il appartient à $K^0_{1+\varepsilon}$. Comme u est déjà dans $K^1_\varepsilon(\Gamma)$, elle coïncide avec la solution $w \in E_{1+\varepsilon}$ du problème (3.6) avec second membre $p = g$. ■

Et grâce au Lemme 3.5:

Corollaire 3.9 *Il existe une unique solution* $u_0 \in E_0$ *au problème de transmission* (3.3).

DÉMONSTRATION. Vu que la condition (3.4) est satisfaite sur la droite $\operatorname{Re}\lambda = 1$, il suffit cette fois-ci d'appliquer le Théorème 3.7 pour $\gamma = 0$. ■

Il reste à comparer u et u_0. Avec $h = r^2 g$, en prenant $\lambda = -\varepsilon - i\eta$ comme paramétrisation de la droite $\operatorname{Re}\lambda = -\varepsilon$ et $\lambda = 1 + i\eta$ comme paramétrisation de la droite $\operatorname{Re}\lambda = 1$, (3.7) donne:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r,\theta) &= -\frac{1}{2i\pi} \downarrow \int_{\operatorname{Re}\lambda=-\varepsilon} r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1} \hat{h}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \\ \text{et} \quad \tilde{u}_0(r,\theta) &= \frac{1}{2i\pi} \uparrow \int_{\operatorname{Re}\lambda=1} r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1} \hat{h}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec $h = r^2 g$. On va maintenant expliquer pourquoi, comme il est classique en théorie des problèmes à coins, voir [2], la différence $u - u_0$ s'exprime comme une somme finie de résidus d'une fonction méromorphe.

1. Le symbole $\mathscr{L}$ est polynomial en λ à valeurs dans l'espace des opérateurs bornés de $\hat{E}$ dans $L^2(G)$ (voir début de la section 3.3), donc analytique. Son inverse existe sauf en un ensemble dénombrable de points en vertu du Lemme 3.4. On déduit du théorème analytique de Fredholm (et en remarquant que l'injection $\hat{E} \hookrightarrow L^2(G)$ est compacte) le résultat suivant:

Théorème 3.10 *L'inverse du symbole Mellin* $\lambda \mapsto \mathscr{L}(\lambda)^{-1}$ *est une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *à valeurs dans l'espace* $\mathbb{L}(L^2(G), \hat{E})$ *des applications continues de* $L^2(G)$ *dans* $\hat{E}$*. De plus ses parties polaires sont de rang fini. L'ensemble de ses pôles est noté* $\mathfrak{S}(\mathscr{L})$*, qui est le spectre de* $\mathscr{L}$*.*

2. La transformée de Mellin du second membre est analytique:

Lemme 3.11 *Avec* $h = r^2 g$*, où* g *est définie au début de la section* 3.3*, la fonction* $\hat{h}$ *est holomorphe à valeurs dans* $L^2(G)$ *à l'intérieur de la bande* $-\varepsilon < \operatorname{Re}\lambda < 1$ *pour tout* $\varepsilon > 0$*.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que

$$\int_0^\infty \|r^{-\lambda}\hat{h}(r)\|_{L^2(G)} \frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty.$$

En coupant l'intégrale en deux intégrales, de bornes 0 et 1, resp. 1 et $+\infty$, on majore l'intégrale par $c(\|g\|_{K_0^0(\Gamma)} + \|g\|_{K_{1+\varepsilon}^0(\Gamma)})$, où les deux normes sont bornées du fait que g est dans $L^2(\Gamma)$ à support compact. ■

On choisit ε telque $\mathfrak{S}(\mathscr{L}) \cap \{-\varepsilon < \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ soit vide. Comme $\mathscr{L}(\lambda)^{-1}$ est méromorphe et $\hat{h}(\lambda)$ holomorphe, pour tout $r > 0$ fixé, la fonction $r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\,\hat{h}(\lambda)$ est méromorphe à valeurs dans $\hat{E}$ sur la bande $-\varepsilon < \operatorname{Re}\lambda < 1$. L'ensemble $\mathfrak{S}_{0,1}(\mathscr{L})$ défini par $\mathfrak{S}(\mathscr{L}) \cap \{-\varepsilon < \operatorname{Re}\lambda < 1\}$ est fini d'après le Lemme 3.6 et le Théorèmes 3.10. De plus par choix de ε

$$\mathfrak{S}_{0,1}(\mathscr{L}) = \mathfrak{S}(\mathscr{L}) \cap \{0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda < 1\}.$$

Soit $\mathscr{C}$ un contour simple entourant $\mathfrak{S}_{0,1}(\mathscr{L})$ et contenu dans $-\varepsilon < \operatorname{Re}\lambda < 1$. Par le théorème de Cauchy:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}} r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{\lambda_0\,\in\,\mathfrak{S}_{0,1}(\mathscr{L})} \operatorname*{Rés}_{\lambda\,=\,\lambda_0}\; r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda). \tag{3.9}$$

Le Lemme 3.6 et des estimations sur les transformées de Mellin permettant de montrer

- qu'on peut pousser le contour $\mathscr{C}$ jusqu'au bord de la bande $-\varepsilon < \operatorname{Re}\lambda < 1$,
- que les côtés horizontaux du rectangle infini ne contribuent pas à l'intégrale,

on déduit de (3.8) la formule:

$$u_0 - u = \sum_{\lambda_0\,\in\,\mathfrak{S}_{0,1}(\mathscr{L})} \operatorname*{Rés}_{\lambda\,=\,\lambda_0}\; r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1}\hat{h}(\lambda). \tag{3.10}$$

3.5 Décomposition de la solution

Il reste à exploiter la formule ci-dessus: expliciter les résidus autant que faire ce peut et retourner au problème initial sur Ω.

On étudie d'abord un peu plus en détail l'ensemble $\mathfrak{S}_{0,1}(\mathscr{L})$. Il s'agit de trouver les racines λ de l'équation

$$(\mu+1)\,\sin\lambda\pi \;=\; \pm\,(\mu-1)\,\sin\lambda(\pi-\omega), \tag{3.11}$$

contenues dans la bande $\operatorname{Re}\lambda \in [0,1]$. La valeur particulière de l'angle $\omega = \pi/2$ permet des calculs explicites aisés. Posons $t = \lambda\pi/2$. Alors l'équation (3.11) devient

$$2(\mu+1)\,\sin t\cos t \;=\; \pm\,(\mu-1)\,\sin t.$$

D'où les racines $t = k\pi$, correspondant à $\lambda = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, et l'équation résiduelle

$$\cos t = \pm\rho, \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{|\mu - 1|}{2|\mu + 1|}\,.$$

Cette équation a les racines $t = \arccos\rho + 2k\pi$ et $t = -\arccos\rho + (2k-1)\pi$ lorsque $\rho \leqslant 1$, et les racines $t = 2k\pi \pm i\,\mathrm{argch}\,\rho$ lorsque $\rho > 1$. D'autre part $\rho > 1$ si et seulement si $-3 < \mu < -1/3$. Ceci permet immédiatement d'établir

Lemme 3.12 *On suppose* $\mu < 0$ *et* $\mu \neq -1$.

- *Si* $\mu \geqslant -\frac{1}{3}$ *ou* $\mu \leqslant -3$,

$$\mathfrak{S}_{0,1}(\mathscr{L}) = \{0, \lambda_1(\mu)\} \tag{3.12}$$

où la fonction λ_1 *est croissante sur* $[-\frac{1}{3}, 0]$ *, avec* $\lambda_1(-\frac{1}{3}) = 0$ *et* $\lambda_1(0) = \frac{2}{3}$ *; enfin* $\lambda_1(\frac{1}{\mu}) = \lambda_1(\mu)$.

- *Si* $-3 < \mu < -\frac{1}{3}$,

$$\mathfrak{S}_{0,1}(\mathscr{L}) = \{0, \pm i\eta(\mu)\} \tag{3.13}$$

où la fonction $\eta(\mu)$ *est positive, décroissante sur* $(-1, -\frac{1}{3}]$ *, tend vers l'infini quand* $\mu \to -1$ *,* $\eta(-\frac{1}{3}) = 0$ *; enfin* $\eta(\frac{1}{\mu}) = \eta(\mu)$.

Pour $\lambda_0 \in \mathfrak{S}(\mathscr{L})$, introduisons l'espace

$$Z^{\lambda_0} = \big\{ \operatorname*{Rés}_{\lambda=\lambda_0} r^\lambda \mathscr{L}(\lambda)^{-1} G(\lambda), G(\lambda) \text{ holomorphe en } \lambda_0 \big\}.$$

Un développement en série de r^λ au voisinage de λ_0 donne immédiatement que les éléments de Z^{λ_0} ont la forme d'une somme finie de termes en $r^{\lambda_0} \log^q r\, \varphi(\theta)$. La formule (3.10) se réécrit alors

$$u_0 - u = \sum_{\lambda_0 \in \mathfrak{S}_{0,1}(\mathscr{L})} \operatorname*{Rés}_{\lambda=\lambda_0} z_{\lambda_0} \quad \text{où} \quad z_{\lambda_0} \in Z^{\lambda_0}. \tag{3.14}$$

Tronquons par χ la décomposition ci-dessus. On a donc $\chi u_0 \in H^2(\Omega_\pm)$ et, comme χu est par hypothèse dans $H^1(\Omega)$, la somme des χz_{λ_0} doit aussi appartenir à $H^1(\Omega)$. Vu leur structure en r^{λ_0} , cela exige que chacun d'entre eux soit dans $H^1(\Omega)$. Pour λ_0 de partie réelle > 0 , c'est toujours vrai. Par contre, si $\mathrm{Re}\,\lambda_0 = 0$ sans que λ_0 soit nul, cela implique que $z_{\lambda_0} = 0$. Enfin, si $\lambda_0 = 0$, cela implique que z_{λ_0} soit une constante, donc une fonction régulière. C'est pourquoi l'on pose finalement

$$u_{\mathrm{reg}} = \chi(u_0 - z_0) \in H^2(\Omega_\pm),$$

et que (3.14) devient

$$u_{\mathrm{reg}} - \chi u = \sum_{\lambda_0 \in \mathfrak{S}(\mathscr{L}),\ 0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1} \operatorname*{Rés}_{\lambda=\lambda_0} z_{\lambda_0} \quad \text{où} \quad z_{\lambda_0} \in Z^{\lambda_0}. \tag{3.15}$$

Ceci, avec les précisions fournies par le Lemme 3.12 permet finalement d'obtenir:

Théorème 3.13 *Soit* $u \in H^1_0(\Omega)$ *solution du problème* (1.1) *avec second membre* $f \in L^2(\Omega)$. *Soit* $\mathscr{O}$ *un coin de transmission (un coin de* Ω_- *) et* χ *une fonction de troncature qui vaut* 1 *au voisinage de* $\mathscr{O}$. *On pose* $\mu = a_+/a_-$ *et on suppose que* $\mu < 0$ *et que* $\mu \neq -1$. *Alors:*

- *Si* $\mu > -\frac{1}{3}$ *ou* $\mu < -3$,
$$\chi u = u_{\mathrm{reg}} + c_1 \chi r^{\lambda_1} \varphi_1(\theta) \tag{3.16}$$
où la fonction $u_{\mathrm{reg}} \in H^1(\Omega) \cap \big(H^2(\Omega_-) \times H^2(\Omega_+)\big)$, *l'exposant* λ_1 *est défini dans le Lemme* 3.12 *et la fonction* φ_1 *est dans* $H^1(G)$ *avec* $\varphi_{1,\pm} \in \mathscr{D}(\overline{G}_\pm)$.
- *Si* $-3 \leqslant \mu \leqslant -\frac{1}{3}$,
$$\chi u_\pm \in H^2(\Omega_\pm). \tag{3.17}$$

4 Conclusion et perspectives

Après les théorèmes 2.1 et 3.13, la question qui reste pendante est celle de l'existence d'une solution au problème (1.1).

Par le théorème de Lax-Milgram, après multiplication par un nombre complexe bien choisi, on montre facilement que le problème (1.1) a une unique solution si a_+/a_- n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$. Cela permet de déduire que

Si l'opérateur A *du problème* (1.1) *est à indice*[1] *de* $H^1_0(\Omega)$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$, *alors son indice est nul.*

Il reste donc à savoir si l'opérateur A est à indice. La méthode d'investigation envisagée est la construction d'une paramétrix (i.e. un inverse modulo un opérateur compact). Une telle construction s'effectue par localisation, la seule difficulté restante étant le voisinage de chaque coin de transmission intérieur, à cause de la présence permanente de pôles du symbole $\mathscr{L}(\lambda)^{-1}$ sur la droite $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

La conjecture est la suivante :

- Si $\mu > -\frac{1}{3}$ ou $\mu < -3$, l'opérateur A est à indice.
- Si $-3 \leqslant \mu \leqslant -\frac{1}{3}$, l'opérateur A n'est pas à indice (car à image non fermée).

Ceci repose sur une analyse fine de $\mathscr{L}(\lambda)^{-1}$ au voisinage de ses pôles situés sur la droite $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Dans le premier cas, le seul pôle dans cette situation est $\lambda = 0$: il est double, donnant un espace Z^0 engendré par 1 est $\log r$; 1 est une fonction régulière et le coefficient devant $\log r$ dans l'asymptotique est une forme linéaire continue sur l'espace des seconds membres (la dualité contre la fonction constante 1), contrairement à la situation du second cas.

[1] Un opérateur est dit à indice si son noyau et son conoyau sont de dimension finie, l'indice est alors la dimension du noyau moins celle du conoyau. Rappelons en particulier qu'un opérateur à indice est à *image fermée.* De plus l'indice est une fonction continue dans l'ensemble des opérateurs à indice pour la topologie des opérateurs bornés.

Références

[1] P. GRISVARD. *Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains*. Pitman, London 1985.

[2] V. A. KONDRAT'EV. Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.* **16** (1967) 227–313.

[3] S. NICAISE. *Polygonal interface problems*. Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik, 39. Verlag Peter D. Lang, Frankfurt-am-Main 1993.