Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée

Monique Dauge et Isabelle Gruais

Résumé – Le comportement asymptotique d'une plaque mince linéairement élastique constituée d'un matériau monoclinique et encastrée latéralement, est envisagé sous la forme d'un Ansatz polynomial. Les conditions d'encastrement font apparaître corrélativement un Ansatz de couche limite. La combinaison des deux constitue un développement asymptotique dont la justification résulte d'estimations de l'énergie et de bornes uniformes sur les premiers termes négligés. Pour des évaluations en normes plus élevées, l'étude des singularités aux arêtes est nécessaire.

Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate

Abstract – *The asymptotics of the displacement in a thin linear elastic clamped plate made of a monoclinic material is described by the combination of a polynomial Ansatz and of a boundary layer expansion. An inductive procedure is thus performed whose justification lies in energy estimates and uniform bounds on the first neglected terms. For higher order norms, singularities along the edges of the plate must be described.*

Abridged English Version – 1. The scaling. – This note addresses the asymptotics of the solution of the plate problem set on a thin domain $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbb{R}^3$ where the smooth bounded midsurface ω is constant and the thickness ε tends to zero. The plate being clamped on its lateral boundary Γ_0^ε, the variational formulation reads (2) with the space of admissible displacements defined by (1).

To get rid of the dependence of the open set Ω^ε upon the parameter ε, we introduce a scaling that transforms Ω^ε into $\Omega = \omega \times (-1, +1)$ and the initial problem into (6) where the dependence upon ε lies merely on the integrand of the energy.

2. Polynomial Ansatz. – We formally begin with a polynomial Ansatz of the scaled displacement $u(\varepsilon)$ under the form (8) which, once inserted into (6) and identified term by term so as to eliminate the powers of ε, induces a sequence of boundary value problems whose solutions are the coefficients u^{2k} in (8) : *see* Theorem 1.

These problems are singularly perturbed and their principal part mainly consists of Neumann problems with respect to the variable x_3 on the interval $(-1, +1)$ and therefore are submitted to a compatibility condition on the right hand side, involving the terms u_3^{2k-4} and (u_1^{2k-2}, u_2^{2k-2}) for the solvability of the problem in u^{2k}; the fast variable x_3 being tangential to the lateral surface Γ_0, the functions u^{2k} actually do not satisfy the boundary Dirichlet condition in general as soon as $k > 0$.

3. The boundary layer. – To compensate for the Dirichlet traces on Γ_0, we introduce a *boundary layer expansion* based on functions that solve a *reduced-normal problem* on the semi-infinite strip (12) and have the nice property of decreasing exponentially as $t = \frac{r}{\varepsilon}$ tends to $+\infty$ provided the boundary Dirichlet data g in (13) is corrected by the trace of a displacement which lies in a space $\mathscr{R}$ of dimension 4 of rigid displacements : *see* Theorem 2. This will induce the construction of an extra *odd* Ansatz along with the other parts of the multi-scaled expansion (16).

4. Energy estimates. – This ultimate step actually justifies the above construction by achieving optimal estimates either in the norm of the energy or in higher order norms for the error between the scaled displacement $u(\varepsilon)$ and a complete Ansatz (17) of arbitrary order N. It is shown that the order of magnitude thus

obtained is that of the first neglected term in the infinite asymptotic expansion, *see* Theorem 3. By the same strategy, we also obtain optimal estimates for the strain and the stress tensors, *see* (19) and (21).

To get estimates in higher order norms, one has to take into account the singularities of the problem along the edges $\partial\omega \times \{\pm 1\}$ due to the change in the boundary condition. According to (25), this will lower the global estimate by an order ε^m if the required regularity is that of the space $H^{m+1}(\Omega)$. We also obtain estimates in L^∞ norm, *see* (26)-(27).

---

1. INTRODUCTION. – On étudie le comportement du champ de déplacement et du tenseur des contraintes dans une famille de plaques minces Ω^ε constituées d'un matériau homogène caractérisé par sa matrice de rigidité A. On suppose que $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, +\varepsilon)$ où le domaine à frontière régulière $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est la surface moyenne supposée constante. Considérant le cas où la plaque est encastrée sur son bord latéral $\Gamma_0^\varepsilon = \partial\omega \times (-\varepsilon, +\varepsilon)$, le déplacement u^ε est l'unique solution dans l'espace

$$V(\Omega^\varepsilon) = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in H^1(\Omega)^3; \quad v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_0^\varepsilon\} \tag{1}$$

du problème variationnel :

$$\forall\, v^\varepsilon \in V(\Omega^\varepsilon), \qquad \int_{\Omega^\varepsilon} A\, e(u^\varepsilon) : e(v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \cdot v^\varepsilon, \tag{2}$$

où $e(u^\varepsilon)$ est le tenseur linéarisé des déformations défini par $e_{ij}(v) = \frac{1}{2}\,(\partial_i\, v_j + \partial_j\, v_i)$ et $a : b$ désigne le produit scalaire usuel de deux matrices 3×3 associé à la norme de Frobenius. On suppose que la matrice de rigidité $A = (A_{ijkl})$ est définie positive et vérifie les relations habituelles de symétrie : $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$, et les conditions caractéristiques d'un matériau *monoclinique* [5], [9] par rapport au plan médian : $A_{\alpha\beta\gamma3} = 0$ et $A_{\alpha333} = 0$ pour tous α, β et $\gamma \in \{1, 2\}$. Pour fixer les idées on se limite à des coefficients indépendants de la variable x_3. On se propose d'étudier le comportement quand ε tend vers zéro du déplacement u^ε et du tenseur des contraintes $\sigma^\varepsilon = A\, e(u^\varepsilon)$.

Une dilatation suivant l'axe vertical ramène à une configuration de référence fixe :

$$x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon,\, x_2^\varepsilon,\, x_3^\varepsilon) \in \Omega^\varepsilon \mapsto x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \Omega, \quad \text{où} \quad \Omega = \omega \times I,$$

avec I l'intervalle $(-1, +1)$. Alors, le déplacement inconnu u^ε devient une fonction $u(\varepsilon)$ de la nouvelle variable x que pour des raisons d'homogénéité on définit par :

$$u_\alpha(\varepsilon)(x) = u_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon), \quad u_3(\varepsilon)(x) = \varepsilon\, u_3^\varepsilon(x^\varepsilon). \tag{3}$$

En particulier, si on introduit le tenseur linéarisé *mis à l'échelle* des déformations $\kappa(\varepsilon)(v)$ associé à $v \in H^1(\Omega)^3$ quelconque par :

$$\kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon)(v) = e_{\alpha\beta}(v), \quad \kappa_{\alpha3}(\varepsilon)(v) = \varepsilon^{-1}\, e_{\alpha3}(v), \quad \kappa_{33}(\varepsilon)(v) = \varepsilon^{-2}\, e_{33}(v), \tag{4}$$

on vérifie que : $e(u^\varepsilon) = \kappa(\varepsilon)(u(\varepsilon))$. On ajoute des hypothèses asymptotiques sur le second membre :

$$\left.\begin{array}{l} f_\alpha(\varepsilon)(x) := f_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) \\ f_3(\varepsilon)(x) := \varepsilon^{-1} f_3^\varepsilon(x^\varepsilon) \end{array}\right\} \text{ se développent en puissances} \geq 0 \text{ paires de } \varepsilon, \tag{5}$$

vérifiées par exemple par la force de la pesanteur, et qui assurent que le développement asymptotique démarre par un terme d'ordre 0 en ε.

Dès lors, le problème initial (2) se réécrit sous la forme du *problème mis à l'échelle* suivant : trouver $u(\varepsilon) \in V(\Omega)$ tel que :

$$\forall\, v \in V(\Omega), \qquad \int_\Omega A\,\kappa(\varepsilon)(u(\varepsilon)) : \kappa(\varepsilon)(v) = \int_\Omega f \cdot v, \tag{6}$$

où :

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)^3; \quad v = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma_0 = \partial\omega \times I\} \tag{7}$$

et l'on s'est ramené à l'étude du comportement asymptotique, quand ε tend vers zéro, du déplacement inconnu $u(\varepsilon)$.

2. L'Ansatz polynomial. – Par suite de l'hypothèse de symétrie du plan médian et de la forme du développement asymptotique du second membre, on cherche $u(\varepsilon)$ *a priori* sous la forme d'un développement polynomial formel pair dit *Ansatz pair* :

$$u(\varepsilon)(x) \simeq u^0(x) + \varepsilon^2\, u^2(x) + \cdots + \varepsilon^{2k}\, u^{2k}(x) + \cdots \tag{8}$$

Suivant une méthode désormais classique [2], [4], on reporte le développement (8) dans le problème aux limites (6) et on identifie formellement les puissances du paramètre ε. Ne conservant dans les conditions aux limites du problème (6) que les conditions de tractions nulles sur les bords $\omega \times \{\pm 1\}$ (donc négligeant pour l'instant les conditions de Dirichlet) on obtient une suite de problèmes aux limites indexés $(\mathscr{P}_k)$ par $k \in \mathbb{N}$, chacun faisant intervenir u^{2k} et u^{2k-2}. Il est bien connu [2], [4], [7], que le premier terme u^0 de ce développement est un déplacement de Kirchhoff-Love, c'est-à-dire qu'il satisfait $e_{i3}(u^0) = 0$. Cela signifie qu'il a la forme suivante

$$u^0(x) = \Big(\zeta_1^0(x_1,x_2) - x_3\,\partial_1\zeta_3^0(x_1,x_2),\ \zeta_2^0(x_1,x_2) - x_3\,\partial_2\zeta_3^0(x_1,x_2),\ \zeta_3^0(x_1,x_2)\Big), \tag{9}$$

où les fonctions ζ_j^0 sont dites fonctions génératrices. On montre le :

Théorème 1. – *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f^{2k} \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$ le terme d'ordre $2k$ dans le développement en puissances paires du second membre de (6) et soit $\breve{u}_{\mathrm{KL}}^{2k}$ un déplacement de Kirchhoff-Love. On suppose que $u^{-2} = 0$. Alors il existe une unique suite (u^{2k}) résolvant la suite de problèmes $(\mathscr{P}_k)$ complétés par les conditions de Dirichlet en moyenne*

$$\forall\, x_* \in \partial\omega, \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} u^{2k}(x_*,x_3)\,dx_3 = \int_{-1}^{+1} \breve{u}_{\mathrm{KL}}^{2k}(x_*,x_3)\,dx_3, \\ &\int_{-1}^{+1} \partial_n u_3^{2k}(x_*,x_3)\,dx_3 = \int_{-1}^{+1} \partial_n \breve{u}_{3,\mathrm{KL}}^{2k}(x_*,x_3)\,dx_3. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

De plus, u^{2k} admet une décomposition unique sous la forme : $u^{2k} := v^{2k} + u_{\mathrm{KL}}^{2k}$ où

$$v^0 = 0 \quad \textit{et} \quad \forall k > 0,\ \forall\, x_* \in \overline{\omega}, \qquad \int_{-1}^{+1} v^{2k}(x_*,x_3)\,dx_3 = 0, \tag{11}$$

et u_{KL}^{2k} est un déplacement de Kirchhoff-Love dont les fonctions génératrices $(\zeta_1^{2k}, \zeta_2^{2k})$ et ζ_3^{2k} résolvent des problèmes de membrane et de flexion sur ω respectivement associés à la matrice de rigidité homogénéisée $M_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta33}\,A_{3333}^{-1}\,A_{33\gamma\delta}$.

L'algorithme sous-jacent au Théorème 1 est essentiellement décrit par la résolution de problèmes de Neumann en la variable x_3 sur l'intervalle I exigeant pour leur résolubilité une condition de moyenne nulle portant sur les seconds membres. C'est cette condition qui induit les problèmes de membrane et de flexion.

La condition de Dirichlet (10) équivaut à $u_{\mathrm{KL}}^{2k} = \breve{u}_{\mathrm{KL}}^{2k}$ sur Γ_0. Mais, à l'exception du premier terme $u^0 = u_{\mathrm{KL}}^0$, les autres termes u^{2k} ne satisfont plus en général la condition de Dirichlet nulle sur le bord Γ_0.

3. La couche limite. – Pour y remédier, on introduit un deuxième Ansatz de *couche limite* écrit sous la forme $\sum_{k\geq 1} \varepsilon^k\, w^k(\frac{r}{\varepsilon}, s, x_3)$ dans un système de coordonnées locales (r, s) où r est la distance au bord $\partial\omega$ et où s est l'abscisse curviligne classique le long de $\partial\omega$ ramenée au rôle d'un paramètre lors de la réduction qui transforme le problème aux limites en un problème en les seules variables normales $(t, x_3) = (\frac{r}{\varepsilon}, x_3)$ posé sur la demi-bande :

$$\Sigma^+ = \{(t, x_3) \in \mathbb{R}^+ \times I\}. \tag{12}$$

Par raison d'homogénéité, on introduit le changement de fonction : $(w_r, w_s, w_3) \mapsto (\varphi_t, \varphi_s, \varphi_3) = (\varepsilon\, w_r, \varepsilon\, w_s, w_3)$.

Pour tout s fixé dans $\partial\omega$, le *problème normal réduit* est le problème mixte Dirichlet-Neumann défini dans Σ^+, de donnée de Dirichlet g sur le bord latéral $\gamma_0 = \{0\} \times I$ de Σ_+ et d'inconnue φ :

$$\varphi|_{\gamma_0} = g \quad \text{et} \quad \forall\, v \in V(\Sigma^+), \quad \int_{\Sigma^+} B(s)\, e(\partial_t, 0, \partial_3)(\varphi) : e(\partial_t, 0, \partial_3)(v) = 0, \tag{13}$$

pour des fonctions tests dans l'espace :

$$V(\Sigma^+) = \{v \in H^1(\Sigma^+)^3; \quad v = 0 \ \text{ sur } \ \gamma_0\}. \tag{14}$$

Ici, $e(\partial_t, 0, \partial_3)(v)$ désigne la forme réduite du tenseur linéarisé des déformations et la matrice réduite $B(s) = A(0, s)$ possède les mêmes propriétés de symétrie et de positivité que A. On désigne par $\mathscr{R}$ l'espace des déplacements rigides pour le tenseur $e(\partial_t, 0, \partial_3)(v)$. L'espace $\mathscr{R}$ est de dimension 4 :

$$\mathscr{R} = \{R = (R_t, R_s, R_3) = (c_t, c_s, c_3) + c_n\,(-x_3, 0, t) \mid \ c_t, c_s, c_3, c_n \in \mathbb{R}\}. \tag{15}$$

Se basant sur un “principe de Saint-Venant”, *cf* par exemple [8], et sur une analyse du problème de Neumann associé à l'opérateur d'élasticité de matrice $B(s)$ sur la bande $\mathbb{R} \times I$ par une technique de calcul symbolique à valeur opérateurs (classique dans le traitement des ouverts à coins par transformation de Mellin), on démontre que

Théorème 2. – *Pour tout h dans $H^{1/2}(\gamma_0)$ il existe un unique déplacement rigide R appartenant à $\mathscr{R}$ tel que le problème* (13) *avec donnée $g = h + R|_{\gamma_0}$ admette une solution dans $H^1(\Sigma^+)^3$. De plus il existe $\eta_0 > 0$ indépendant de h, tel que $e^{\eta_0 t}\, \varphi(t, x_3)$ est borné sur Σ^+.*

L'utilisation du résultat ainsi obtenu montre que la trace de l'Ansatz polynomial doit être orthogonale à un espace de dimension 4 pour chaque s fixé pour assurer la décroissance exponentielle des termes w^k de couche limite, ce qui est réalisé par l'adjonction d'un Ansatz polynomial complémentaire *impair* raccordé à l'ensemble au moyen d'un algorithme à deux pas.

4. Développement asymptotique. – Finalement, on obtient un développement asymptotique de la forme :

$$u(\varepsilon)(x) \simeq u^0_{\mathrm{KL}}(x) + \varepsilon \Psi^1(x, \frac{r}{\varepsilon}) + \cdots + \varepsilon^k \Psi^k(x, \frac{r}{\varepsilon}) + \cdots \tag{16}$$

dont les fonctions $\Psi^k(x, t) = u^k_{\mathrm{KL}}(x) + v^k(x) - \chi(r)\, w^k(t, s, x_3)$ contiennent les termes de couche limite $w^k(t, s, x_3)$ exponentiellement décroissants quand $t \to +\infty$, χ est une fonction de troncature égale à 1 au voisinage de $\partial\omega$ et à 0 pour $r > r_0$ où r_0 est > 0. Les termes u^k_{KL} et v^k sont comme dans le Théorème 1.

La dernière étape est celle de la justification a posteriori du développement asymptotique (16) par une estimation de l'erreur entre le déplacement mis à l'échelle $u(\varepsilon)$ et le développement asymptotique complet d'ordre N. On définit ce dernier par :

$$
(17) \qquad U^N(\varepsilon) = u^0_{\mathrm{KL}}(x) + \varepsilon\Psi^1(x, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon^2\Psi^2(x, \frac{r}{\varepsilon}) + \cdots + \varepsilon^N\Psi^N(x, \frac{r}{\varepsilon}),
$$

et on cherche un estimation d'erreur optimale sur le reste $\overline{U}^N(\varepsilon) = u(\varepsilon) - U^N(\varepsilon)$ qui appartient à $V(\Omega)$, pour la norme de l'espace $H^1(\Omega)^3$. Pour cela, on utilise la coercivité de l'opérateur de l'élasticité et l'inégalité de Korn, vraie pour les éléments de $V(\Omega)$, pour déduire le résultat souhaité de l'estimation de l'énergie du problème.

Classiquement, on "pousse" le développement jusqu'à un ordre plus élevé, ici $N+4$, pour obtenir une première estimation grossière de l'ordre de ε^N, le résultat final provenant de l'estimation des termes "en trop" $\Psi^{N+1}, \Psi^{N+2}, \Psi^{N+3}, \Psi^{N+4}$ que l'on néglige. Ainsi, on montre que l'erreur est déterminée par le premier terme négligé Ψ^{N+1} et, ainsi, l'erreur obtenue est génériquement optimale. Le résultat correspondant s'énonce :

Théorème 3. – *Soit $u(\varepsilon)$ la solution du problème* (6) *avec second membre f régulier. Alors, pour tout $N \geq 0$:*

$$
(18) \qquad \|u(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u^k + \chi(r) \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k w^k(\frac{r}{\varepsilon}, s, x_3)\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C\,\varepsilon^{N+1/2}.
$$

Il redonne en particulier les estimations de [2], [4] pour $N = 0$ et de [7] pour $N = 0, 1, 2$. Par exemple, en exploitant la forme particulière des premiers termes pour $k = 0$ et pour $k = 1$ ($v^1 = 0$ et $w^1_3 = 0$) on obtient :

$$
\|u_\alpha(\varepsilon) - u^0_{\mathrm{KL},\alpha}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,\varepsilon^{1/2}, \quad \alpha = 1, 2
$$

$$
\|u_3(\varepsilon) - u^0_{\mathrm{KL},3}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,\varepsilon, \quad \text{et} \quad \|u_3(\varepsilon) - u^0_{\mathrm{KL},3} - \varepsilon u^1_{\mathrm{KL},3}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,\varepsilon^{3/2},
$$

et pour le tenseur de déformation (4) mis à l'échelle $\kappa(\varepsilon)$:

$$
(19) \qquad \|\kappa(\varepsilon)\Big(u(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{2} \varepsilon^k(u^k_{\mathrm{KL}} + v^k)\Big)\|_{L^2(\Omega)^6} \leq C\,\varepsilon^{1/2}.
$$

Nous obtenons par le même moyen un développement asymptotique et des estimations pour le tenseur des contraintes mis à l'échelle $\sigma(\varepsilon) = (\sigma_{kl}(\varepsilon))_{1 \leq k,l \leq 3}$

$$
\sigma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta ij}\kappa_{ij}(\varepsilon)(u(\varepsilon)), \;\; \sigma_{\alpha 3} = \varepsilon^{-1} A_{\alpha 3ij}\kappa_{ij}(\varepsilon)(u(\varepsilon)), \;\; \sigma_{33} = \varepsilon^{-2} A_{33ij}\kappa_{ij}(\varepsilon)(u(\varepsilon)).
$$

Le développement (16) du champ de déplacement induit le développement suivant pour le tenseur des contraintes :

$$
(20) \sigma_{ij}(\varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \sigma^k_{ij} + \chi(r) \sum_{k \geq k_{ij}} \varepsilon^k \Xi^k_{ij}(\frac{r}{\varepsilon}, s, x_3) \;\; \text{où } k_{\alpha\beta} = 0, \; k_{\alpha 3} = -1, \; k_{33} = -2
$$

et où les σ^k_{ij} sont des tenseurs réguliers et les Ξ^k_{ij} sont des tenseurs exponentiellement décroissants. Ceci permet par exemple de voir que les estimations, *cf* [1, Ch.3],

$$
(21) \qquad \|\sigma_{ij}(\varepsilon) - \sigma^0_{ij}\|_{E_{ij}} \leq C\,\varepsilon^{1/2} \text{ où } E_{\alpha\beta} = L^2(\Omega), \; E_{\alpha 3} = H^1(I, H^{-1}(\omega)), \; E_{33} = H^2(I, H^{-2}(\omega))
$$

sont optimales.

5. Estimations dans des normes d'ordre plus élevé. – Lorsqu'on cherche des estimations dans des normes d'ordre plus élevé, disons H^{m+1}, on doit intégrer des informations supplémentaires qui expriment que la solution $u(\varepsilon)$ du problème mis à l'échelle possède des singularités au voisinage des arêtes $\partial\omega\times\{\pm 1\}$ de la plaque. Leur étude, basée sur [3], montre que le morceau de développement à traiter séparément s'exprime à l'aide de *fonctions singulières "stables"* $\chi^{\pm}(t,x_3)\,\mathcal{S}^{\pm}_{\mathrm{stab},\ell}(t,s,x_3)$ qui dépendent régulièrement du paramètre s pour donner le développement :

$$u(\varepsilon) = u_{\mathrm{reg}}(\varepsilon) + \sum_{+,-}\sum_{\ell} c^{\pm}_{\ell}(\varepsilon)(s)\chi^{\pm}(\frac{r}{\varepsilon},x_3)\mathcal{S}^{\pm}_{\mathrm{stab},\ell}(\frac{r}{\varepsilon},s,x_3) \tag{22}$$

où les $c^{\pm}_{\ell}(\varepsilon)$ sont des fonctions régulières de l'abscisse curviligne s et où $u_{\mathrm{reg}}(\varepsilon)$ est la partie régulière dans $H^{m+1}(\Omega)$ de $u(\varepsilon)$. Tandis que la partie polynomiale de $\Psi^k(\varepsilon)$ est régulière, le terme de couche limite concentre toute la singularité et se développe également sous la forme :

$$w^k(t,s,x_3) = w^k_{\mathrm{reg}}(t,s,x_3) + \sum_{+,-}\sum_{\ell} c^{\pm,k}_{\ell}(s)\chi^{\pm}\mathcal{S}^{\pm}_{\mathrm{stab},\ell}(t,s,x_3) \tag{23}$$

où $c^{\pm,k}_{\ell}$ est une fonction régulière de s et où $w^k_{\mathrm{reg}}(.,s,.)$ est dans $H^{m+1}(\Sigma^+)^3$ pour tout s. Les fonctions $c^{\pm,k}_{\ell}$ sont les coefficients du développement asymptotique de $c^{\pm}_{\ell}(\varepsilon)$:

$$c^{\pm}_{\ell}(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k\, c^{\pm,k}_{\ell} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \tag{24}$$

On montre alors l'estimation :

$$\|u_{\mathrm{reg}}(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\,u^k + \chi(r)\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k\,w^k_{\mathrm{reg}}(\frac{r}{\varepsilon},s,x_3)\|_{H^{m+1}(\Omega)^3} \le C\,\varepsilon^{N-m+1/2}. \tag{25}$$

Cela permet de déduire les estimations en norme uniforme :

$$\begin{gathered}\|u_\alpha(\varepsilon) - u^0_{\mathrm{KL},\alpha}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\,\varepsilon, \quad \alpha=1,2\\ \|u_3(\varepsilon) - u^0_{\mathrm{KL},3}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\,\varepsilon \quad \text{et} \quad \|u_3(\varepsilon) - u^0_{\mathrm{KL},3} - \varepsilon u^1_{\mathrm{KL},3}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\,\varepsilon^2.\end{gathered} \tag{26}$$

On remarque que, si l'on revient aux inconnues initiales u^ε, l'estimation sur la troisième composante devient

$$\|u^\varepsilon_3 - \frac{1}{\varepsilon}\,u^0_{\mathrm{KL},3}\|_{L^\infty(\Omega^\varepsilon)} \le C \quad \text{et} \quad \|u^\varepsilon_3 - \frac{1}{\varepsilon}\,u^0_{\mathrm{KL},3} - u^1_{\mathrm{KL},3}\|_{L^\infty(\Omega^\varepsilon)} \le C\,\varepsilon, \tag{27}$$

ce qui explique pourquoi on peut constater dans des calculs une erreur importante entre la solution tridimensionnelle et le premier terme de Kirchhoff-Love, et quel est le terme correctif qu'il faut ajouter pour améliorer l'estimation (comme il est indiqué dans [6], il ne faut surtout pas prendre la couche limite pour cela) : ce terme provient en quelque sorte de la partie non décroissante dans le calcul de la couche limite.

Références bibliographiques

[1] P. G. Ciarlet. *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis.* R.M.A. Vol. 14. Masson and Springer-Verlag, Paris and Heidelberg 1990.

[2] P. G. Ciarlet, P. Destuynder. A justification of the two-dimensional plate model. *J. Mécanique* **18** (1979) 315–344.

[3] M. Costabel, M. Dauge. Stable asymptotics for elliptic systems on plane domains with corners. *Comm. Partial Differential Equations* n° **9 & 10** (1994) 1677–1726.

[4] P. Destuynder. Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques. Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1980.

[5] P. Destuynder. *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire.* Masson, Paris 1986.

[6] R. D. Gregory, F. Y. Wan. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *J. Elasticity* **14** (1984) 27–64.

[7] S. A. Nazarov, I. S. Zorin. Egde effect in the bending of a thin three-dimensional plate. *P. M. M. USSR* **53 (4)** (1989) 500–507.

[8] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization.* Studies in mathematics and its applications. North-Holland, Amsterdam 1992.

[9] C. Schwab. A-posteriori modeling error estimation for hierarchic plate models. Preprint, University of Maryland, Baltimore, Maryland 1994.

IRMAR (URA CNRS 305), Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex, FRANCE