

# SINGULARITÉS D'ARÊTES POUR LES PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

Martin Costabel et Monique Dauge

**Résumé.** *Les singularités d'arêtes sont reliées aux singularités de coin sur des secteurs plans. Les singularités de coin se caractérisent par certains exposants singuliers qui dépendent de l'ouverture du secteur. Quand l'ouverture du secteur varie, les exposants peuvent avoir des points de croisement ou de branchement. Nous construisons des asymptotiques d'arêtes qui tiennent compte de ces phénomènes.*

**Abstract.** *Edge singularities are closely linked with corner singularities in plane sectors. Corner singularities are characterized by certain singular exponents which depend on the opening of the sector. When the opening of the sector is varying, the exponents can have crossing or branching points. We construct edge asymptotics which take these phenomena into account.*

## Motivations

Les solutions de problèmes aux limites elliptiques ont des singularités près des points et variétés singuliers du bord du domaine (coins, arêtes). La détermination de ces singularités joue un rôle très important dans les calculs numériques des problèmes aux limites. Ce rôle est double : d'une part, on utilise la connaissance de la forme des singularités pour améliorer l'efficacité des méthodes numériques ; d'autre part, les coefficients des singularités ayant une signification physique directe ("stress intensity factors"), on construit des algorithmes pour calculer ces coefficients. Un exemple de calcul à très grande échelle pour des structures mécaniques est donné dans [2].

Ces applications motivent une description mathématique des singularités selon les deux directions suivantes :

1. Description de la solution modulo une régularité finie et estimations dans des normes d'espaces de Sobolev.
2. Construction explicite d'une base (ou d'un ensemble générateur) de fonctions singulières ne dépendant que de la géométrie du domaine et des coefficients de l'opérateur différentiel.

Bien qu'il existe dans la littérature mathématique des résultats assez généraux sur les problèmes aux limites elliptiques dans des domaines avec arêtes [17], [20], [14], [8], des résultats suffisamment précis pour répondre aux motivations mentionnées ci-dessus n'existaient (jusqu'en 88) que dans des cas particuliers (essentiellement des coefficients constants et des arêtes droites) [13], [18], [15], [8]. Récemment, plusieurs auteurs ont commencé à étudier les effets de "croisement" et de "branchement" des singularités aux arêtes : [7, 3, 4, 5] et [16] pour les croisements et [19] pour les branchements. Nous allons décrire ici les singularités d'arêtes pour des problèmes aux limites généraux.

## Buts

On regarde des domaines  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , ( $n \geq 3$ ),  $C^\infty$  par morceaux avec des arêtes  $C^\infty$ . On suppose qu'il existe une sous-variété  $E$  de codimension  $n'$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $C^\infty$  et contenue dans le bord  $\partial\Omega$  vérifiant :  $\partial\Omega \setminus E$  est  $C^\infty$  et pour tout point  $y_0$  de l'arête  $E$ , l'intersection de l'espace normal  $N_{y_0}$  avec  $\Omega$  est un cône  $\Gamma_{y_0}$  de  $\mathbb{R}^{n'}$  à section régulière sur la sphère  $S^{n'-1}$ . Pour fixer les idées, on va considérer ici le cas  $n' = 2$ . On a alors :

$$\begin{aligned}\Gamma_{y_0} &= \{(r, \theta) \mid r > 0, 0 < \theta < \omega(y_0)\} \\ \partial\Omega &= \bigcup \overline{\partial_j \Omega}, \quad \partial_j \Omega \text{ des variétés } C^\infty \\ E &= \partial\Omega \setminus \bigcup \overline{\partial_j \Omega}.\end{aligned}$$

Un exemple simple est le cylindre oblique.

On utilise des coordonnées cylindriques locales  $(y, r, \theta)$ , où  $y \in \mathbb{R}^{n-n'}$  paramétrise l'arête  $E$  et  $(r, \theta)$  sont des coordonnées polaires de  $z \in \mathbb{R}^{n'}$ .

Comme problèmes aux limites, on traite le cas général des systèmes elliptiques au sens de Agmon-Douglis-Nirenberg avec des conditions aux limites satisfaisant la condition de Shapiro-Lopatinski :

$$\begin{aligned}Lu &= f \quad \text{dans } \Omega \\ Bu &= g \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus E.\end{aligned}$$

On exige de plus que  $(L, B)$  est "injectivement elliptique le long de  $E$ ", cf [4].

Pour des raisons de brièveté, on regarde ici le cas scalaire.  $L$  est un opérateur proprement elliptique d'ordre  $2m$ :

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Les conditions aux limites sont :

$$B_{jk}u \equiv \sum_{|\beta| \leq m_{jk}} b_{\beta jk}(x) \partial^\beta u = g_{jk}(x), \quad (x \in \partial_j \Omega; k = 1, \dots, m), \quad b_{\beta jk}(x) \in C^\infty(\overline{\partial_j \Omega}).$$

Le problème est alors:

*Etant données*

$$f \in H^{-m+s}(\Omega); \quad g_{jk} \in H^{m-m_{jk}-\frac{1}{2}+s}(\partial_j\Omega); \quad u \in H^{m+s_0}(\Omega); \quad 0 < s_0 < s,$$

*décrire la solution  $u$  modulo  $H^{m+s}(\Omega)$ .*

Le but idéal serait donc un développement asymptotique de la forme

$$\begin{aligned} u &= u_{\text{sing}} + u_{\text{reg}} \\ u_{\text{reg}} &\in H^{m+s}(\Omega), \quad \text{plat en } E \\ u_{\text{sing}} &= \sum_{v \in \mathcal{V}} c_v(y) \cdot v(y, r, \theta), \end{aligned}$$

où l'ensemble fini  $\mathcal{V}$  est un ensemble générateur de fonctions singulières construit le plus explicitement possible, et les coefficients  $c_v$  admettent des estimations dans des espaces de Sobolev sur  $E$ .

## Problèmes sur des secteurs plans

Comme d'habitude, on introduit une famille de problèmes aux limites en dimension  $n'$  ( $= 2$  ici), indexée par  $y \in E$ . On définit les *parties principales conormales*

$$\begin{aligned} M_y(r\partial_r, \partial_\theta) &:= r^{2m} L^{(2m)}(y, 0; 0, \partial_z) \\ C_{jk,y}(r\partial_r, \partial_\theta) &:= r^{m_{jk}} B_{jk}^{(m_{jk})}(y, 0; 0, \partial_z). \end{aligned}$$

La transformation de Mellin remplace  $r\partial_r$  par  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et on obtient le problème de Sturm-Liouville généralisé sur  $[0, \omega(y)]$  décrit par  $(M_y(\lambda, \partial_\theta), C_{jk,y}(\lambda, \partial_\theta))$ .

Ses valeurs propres  $\lambda =: \nu_\kappa(y)$  avec  $\text{Re } \nu_\kappa(y) \geq m - 1$  sont indexées par  $\kappa \in \mathbb{N}^*$ , et on ajoute  $\nu_0 = 0$  (pour inclure le développement de Taylor en  $y \in E$  dans  $u_{\text{sing}}$ ).

On rappelle les résultats classiques de Kondrat'ev [12] et Grisvard [11] sur les singularités en dimension 2 : Soit  $\Omega = \Gamma_\omega = \{(r, \theta) \mid r > 0, 0 < \theta < \omega\}$  et  $u \in H^{m+s_0}(\Omega)$  solution de

$$\begin{aligned} Lu &= f \in H^{-m+s}(\Omega) \\ B_{jk}u &= g_{jk} \in H^{m-m_{jk}-\frac{1}{2}+s}(\partial_j\Omega) \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Alors on a, dans un voisinage de l'origine  $E$  de  $\Omega$ , le résultat suivant.

*Si  $0 \leq s_0 < s$  et si  $\forall \kappa : \text{Re } \nu_\kappa \neq m - 1 + s$ , alors on a  $u = u_{\text{sing}} + u_{\text{reg}}$  avec :*

$$\begin{aligned} u_{\text{reg}} &\in H^{m+s}(\Omega), \quad r^{-m-s}u_{\text{reg}} \in L^2(\Omega) \\ u_{\text{sing}} &= \sum_{\substack{m-1+s_0 < \text{Re } \nu_\kappa + l < m-1+s \\ \kappa, l \in \mathbb{N}}} \sum_{q=0}^{q_{\kappa l}} c_{q,\kappa l} \cdot r^{\nu_\kappa + l} \log^q r \cdot \varphi_{q,\kappa l}(\theta) \\ \varphi_{q,\kappa l} &\in C^\infty[0, \omega], \quad \text{indépendant de } (f, g_{jk}), \end{aligned}$$

*et les estimations naturelles associées pour  $u_{\text{reg}}$  et  $c_{q,\kappa l}$  par  $(f, g_{jk})$  et  $u$  dans  $H^{m+s_0}$ .*

**Exemples.** ( $n' = 2$ ) :

1. Le problème mixte Dirichlet-Neumann pour le laplacien. On regarde la régularité  $H^2$  et on prend  $s = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon < 0$ . On a les 3 cas :

$$\omega < \frac{\pi}{2} : u \in H^2, \quad u_{\text{sing}} \equiv 0$$

$$\omega > \frac{\pi}{2} : u_{\text{sing}} = c_1 \cdot r^{\frac{\pi}{2\omega}} \cdot \sin \frac{\pi\theta}{2\omega} + P, \quad P \text{ polynôme}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} : u_{\text{sing}} = c_1 \cdot (r \log r \cdot \sin \theta + r \cdot \cos \theta) + P.$$

2. Le problème de Dirichlet pour le bilaplacien : les fonctions singulières ont la forme

$$v(r, \theta) = \begin{cases} r^{\nu(\omega)} \cdot \varphi(\omega, \theta); & \omega \neq \omega_0, \omega_1, \dots \\ r^{\nu(\omega)} (\log r \cdot \varphi(\omega, \theta) + \psi(\theta)); & \omega \in \{\omega_0, \omega_1, \dots\} \end{cases}$$

où  $\lambda = \nu(\omega)$  est racine de l'équation caractéristique

$$\sin^2(\lambda - 1)\omega = (\lambda - 1)^2 \sin^2 \omega$$

et où les  $\omega_0, \omega_1, \dots$  correspondent à des racines doubles ( $\omega_0 \simeq 0.813\pi$ ). La fonction  $\omega \mapsto \nu(\omega)$  n'y est pas différentiable.

## Croisement et branchement

Revenant au problème en dimension  $n > 2$ , où  $\omega$  dépend régulièrement de  $y$ , le seul examen des exemples ci-dessus fait apparaître les difficultés suivantes.

1. Au voisinage d'un point  $y_0 \in E$  avec  $\text{Re } \nu(y_0) = m - 1 + s$ , on peut avoir des points  $y$  avec  $\text{Re } \nu(y) < m - 1 + s$ , où la fonction singulière correspondante contribue à  $u_{\text{sing}}$ , et des points  $y$  avec  $\text{Re } \nu(y) > m - 1 + s$ , où la fonction "singulière" fait partie de  $u_{\text{reg}}$ . Comme le montre l'exemple du cylindre oblique, on va avoir de tels points  $y_0$  pour tout  $s$  suffisamment grand. Pour les traiter, il faut *localiser* les fonctions singulières et accepter une perte de régularité :  $s$  doit être remplacé par  $s - \varepsilon < s$ .
2. La multiplicité de l'exposant  $\nu_\kappa + l$  peut changer :
  - (a) deux branches régulières peuvent coïncider, en particulier si  $\nu_\kappa(y_0) = l \in \mathbb{N}$  : on parle d'un *croisement* des exposants ;
  - (b) la fonction continue  $y \mapsto \nu_\kappa(y)$  peut avoir une singularité algébrique : on parle d'un *branchement* des exposants.

Ces phénomènes sont typiques pour les développements asymptotiques de fonctions dépendant régulièrement de  $y$ , comme le montrent les exemples simples suivants.

$$(a) \quad y \mapsto \frac{1}{y} r^y - \frac{1}{y};$$

$$(b) \quad y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}} r^{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} r^{-\sqrt{y}} \quad \text{et} \quad y \mapsto r^{\sqrt{y}} + r^{-\sqrt{y}}.$$

Ces trois fonctions sont  $C^\infty$  par rapport à  $y$  en  $y_0 = 0$  pour tout  $r > 0$ , mais elles sont la somme de deux termes non réguliers en  $y_0 = 0$ .

## Asymptotique simple

Si l'on fait des hypothèses afin d'éviter ces problèmes, on obtient comme dans les travaux [13], [18], [15], *l'asymptotique simple*, i. e. l'asymptotique comme en dimension 2, mais avec paramètre.

*Sous les hypothèses :*

1.  $\forall \kappa, \forall y \in E : \operatorname{Re} \nu_\kappa(y) \neq m - 1 + s$
2. (a)  $\forall \kappa, \kappa', l, l' : \text{soit } \nu_\kappa(y) + l \equiv \nu_{\kappa'}(y) + l'$   
 $\text{soit } \forall y \in E, \nu_\kappa(y) + l \neq \nu_{\kappa'}(y) + l' : \text{pas de croisement}$
- (b) *Multiplicité de  $\nu_\kappa$  constante : pas de branchement,*

alors on a  $u = u_{\text{sing}} + u_{\text{reg}}$  avec :

$$u_{\text{reg}} \in H^{m+s-\varepsilon}(\Omega), \quad r^{-m-s+\varepsilon} u_{\text{reg}} \in L^2(\Omega) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$u_{\text{sing}} = \sum_{\substack{m-1+s_0 < \operatorname{Re} \nu_\kappa + l < m-1+s \\ \kappa, l \in \mathbb{N}}} \sum_{q=0}^{q_{\kappa l}} \hat{c}_{q,\kappa l}(y, r) \cdot r^{\nu_\kappa(y)+l} \log^q r \cdot \varphi_{q,\kappa l}(y, \theta)$$

$$\varphi_{q,\kappa l}(y, \theta) : \text{analytique en } \theta, \quad C^\infty \text{ en } y, \quad \text{indépendant de } (f, g_{jk}),$$

$$c_{q,\kappa l}(y) \in H^{s+m-1-\nu_\kappa-\varepsilon}(E) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

avec estimations. L'extension régulière  $\hat{c}(y, r)$  du coefficient  $c(y)$  est définie par

$$\mathcal{F}_{y \rightarrow \eta} \hat{c}(y, r) = \hat{\Phi}(|\eta| \cdot r) \mathcal{F}_{y \rightarrow \eta} c(\eta)$$

avec une fonction  $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  telle que  $\hat{\Phi}(0) = 1$  et  $\partial^k \hat{\Phi}(0) = 0$  pour  $k = 0, \dots, N$  ( $N$  assez grand). Si  $f$  et  $g_{jk}$  ont la régularité  $2s + m$  en  $y$  au lieu de  $s$ , on peut remplacer  $\hat{c}_{q,\kappa l}(y, r)$  par  $c_{q,\kappa l}(y, r)$ .

## Le résultat principal

Voici notre théorème pour le cas général, formulé ici pour  $n' = 2$  et un opérateur scalaire.

**Théorème.** *Soit  $0 \leq s_0 < s$  ;  $y_0 \in E$  ;  $\varepsilon_0 > 0$  ; on suppose que  $u \in H^{m+s_0}(\Omega)$  est solution de*

$$\begin{aligned} Lu &= f \in H^{-m+s}(\Omega) \\ B_{jk} u &= g_{jk} \in H^{m-m_{jk}-\frac{1}{2}+s}(\partial_j \Omega) \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Alors il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $y_0$  et un ensemble fini de fonctions  $v(y, r, \theta)$ , analytiques en  $\theta$ ,  $C^\infty$  en  $y$ , indépendantes de  $u, f, g_{jk}$  tels que dans ce voisinage on a la décomposition  $u = u_{\text{sing}} + u_{\text{reg}}$  avec :

$$u_{\text{reg}} \in H^{m+s-\varepsilon}(\mathcal{U}), \quad r^{-m-s+\varepsilon} u_{\text{reg}} \in L^2(\mathcal{U}) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$u_{\text{sing}} = \sum_{v \in \mathcal{V}} \hat{c}_v(y, r) \cdot v(y, r, \theta)$$

$$c_v(y) \in H^{s+m-1-\mu_v-\varepsilon}(\mathcal{U} \cap E) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

L'ensemble générateur  $\mathcal{V}$  des fonctions singulières consiste de fonctions  $v$  de la forme

$$\begin{aligned} v(y, r, \theta) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} r^{\lambda} \frac{\varphi(y, \lambda, \theta)}{p_{\gamma}(y, \lambda)} d\lambda \\ &= \sum_k S[p_{\gamma}(y), q_k; r] \psi_{\gamma k}(y, \theta). \end{aligned}$$

Ici, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi_{\gamma k}$  forment deux ensembles finis de fonctions analytiques en  $\theta$ ,  $C^{\infty}$  en  $y$ , les  $\varphi$  holomorphes en  $\lambda$ .  $p_{\gamma}$  est un polynôme en  $\lambda$ ,  $C^{\infty}$  en  $y$ , dont on va décrire la construction. Les  $q_k(\lambda)$  sont des polynômes dans  $\mathbb{P}_{d-1}$  où  $d = \deg p_{\gamma}$ . Les racines de  $p_{\gamma}$  sont à l'intérieur  $\text{int } \gamma$  du contour  $\gamma$  et

$$\mu_v := \sup\{\text{Re } \lambda \mid \lambda \in \text{int } \gamma; p_{\gamma}(\lambda) = 0\}$$

$$S[p, q; r] := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} r^{\lambda} \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)} d\lambda.$$

Les exemples donnés à la fin du § “croisement et branchement” sont des fonctions de type  $S[p, q; r]$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} r^y - \frac{1}{y} &= S[p, q; r] \quad \text{avec } p(y, \lambda) = \lambda(\lambda - y); \quad q = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} r^{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} r^{-\sqrt{y}} &= S[p, q; r] \quad \text{avec } p(y, \lambda) = \lambda^2 - y; \quad q = 1 \\ r^{\sqrt{y}} + r^{-\sqrt{y}} &= S[p, q; r] \quad \text{avec } p(y, \lambda) = \lambda^2 - y; \quad q = \lambda. \end{aligned}$$

On va maintenant décrire quelques lemmes utilisés pour la démonstration du théorème.

## Formule de Leibniz

Le premier est une formule de Leibniz généralisée : cette formule permet d'écrire la fonction singulière  $v(y, r, \theta)$  comme somme de produits des fonctions  $S[p_{\gamma}(y), q_k; r]$  des variables  $y$  et  $r$  et des fonctions  $\psi_{\gamma k}(y, \theta)$  des variables  $y$  et  $\theta$  et aussi de séparer les fonctions génératrices  $v(y, r, \theta)$  des coefficients  $c_v(y)$ .

Soit  $p \in \mathbb{C}[\lambda]$  un polynôme de degré  $d \geq 1$  dont les racines sont contenues dans l'ouvert borné  $D \subset \mathbb{C}$ . Le bord orienté de  $D$  est le contour  $\gamma$ .

Dans le travail classique [1], on trouve l'observation que la forme bilinéaire

$$(f, g) \longmapsto \mathfrak{b}(f, g) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda) g(\lambda)}{p(\lambda)} d\lambda$$

est non-dégénérée sur  $\mathbb{P}_{d-1}$ .

**Lemme 1.** Soient  $\{q_k\}_{k=0,\dots,d-1}$  et  $\{q_k^*\}_{k=0,\dots,d-1}$  deux bases de  $\mathbb{P}_{d-1}$ , biorthogonales par rapport à la forme bilinéaire  $\mathfrak{b}$ . Alors pour tout  $f, g \in \mathcal{O}(\overline{D})$  :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda) g(\lambda)}{p(\lambda)} d\lambda = \sum_{k=0}^{d-1} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda) q_k(\lambda)}{p(\lambda)} d\lambda \right) \cdot \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{g(\lambda) q_k^*(\lambda)}{p(\lambda)} d\lambda \right).$$

**Exemples.**

1. L'exemple décrit dans [1]:

$$q_k(\lambda) = \lambda^k ; \quad q_k^* = \sum_{j=k+1}^d p_j \lambda^{j-k-1} =: p_{k+1}^{\sharp}(\lambda),$$

où  $p_0^{\sharp}(\lambda) = p(\lambda)$  (les  $p_k^{\sharp}$  sont les polynômes décalés de  $p$ ).

2. La formule de Leibniz classique :

$$p = (\lambda - \lambda_0)^d ; \quad q_k = (\lambda - \lambda_0)^k ; \quad q_k^* = (\lambda - \lambda_0)^{d-k-1}.$$

3. La formule de Leibniz pour les différences divisées (cf [5]) :

$$p = \prod_{l=1}^d (\lambda - \mu_l) ; \quad q_k = \prod_{l=1}^k (\lambda - \mu_l) ; \quad q_k^* = \prod_{l=k+2}^d (\lambda - \mu_l).$$

4. Formules de type Rouché (comparer avec les fonctions singulières de [19]) :

$$q_k(\lambda) = \partial_{\lambda}^{d-k} p(\lambda) ; \quad q_k^* \text{ convenable.}$$

L'exemple 3) montre que le comportement en  $r$  des fonctions singulières, décrit par  $S[p, q; r]$ , est pour  $y \in E$  fixe, une combinaison linéaire de  $r^{\mu_k} \log^q r$ , où les  $\mu_k$  sont les racines de  $p$ . Si on choisit  $q$  tel que  $\frac{q}{p} = \prod_{l=1}^k (\lambda - \mu_l)$ , alors

$$S[p, q; r] = S[\mu_1, \dots, \mu_k; r] = \sum_j r^{\mu_j} \prod_{l \neq j} \frac{1}{\mu_l - \mu_j}.$$

Ce sont les différences divisées de la fonction  $\lambda \mapsto r^{\lambda}$ , utilisées dans [4, 5] pour traiter le problème de *croisement* d'exposants. Dans ce travail, on a traité le cas d'opérateurs d'ordre  $2m = 2$ . Les valeurs propres sont toujours simples dans ce cas et le problème de branchement ne se posait donc pas.

**Formule de Rouché**

Pour le problème des branchements, on utilise des résultats sur les fonctions holomorphes à valeurs fredholm, basés sur des travaux de Gohberg et al. [10, 9].

Soit  $\lambda \mapsto \mathbb{M}(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$  holomorphe dans  $\overline{D} \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma = \partial D$ ,  $X$  et  $Y$  des espaces de Hilbert. On suppose que  $\mathbb{M}(\lambda)$  est fredholm pour  $\lambda \in D$  et inversible pour  $\lambda \in \gamma$ . On sait alors qu'il existe un nombre fini de points spectraux  $\nu \in D$  où  $\mathbb{M}(\lambda)$  n'est pas inversible, et on peut définir une multiplicité totale  $m(\nu)$  de  $\nu$  pour  $\mathbb{M}$ .

**Définition.** On appelle polynôme caractéristique de  $\mathbb{M}$  dans  $D$  :

$$P_\gamma(\lambda) = \prod_{\nu \in D} (\lambda - \nu)^{m(\nu)}.$$

On a alors :  $\lambda \mapsto P_\gamma(\lambda) \cdot \mathbb{M}(\lambda)^{-1}$  est holomorphe dans  $\overline{D}$ . De la “formule de Rouché à valeurs opérateurs” de Gohberg-Sigal [10], on déduit :

**Lemme 2.** *On a la représentation pour  $P_\gamma(\mu)$  lorsque  $\mu \notin \overline{D}$  :*

$$P_\gamma(\mu) = \exp \left\{ \operatorname{tr} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathbb{M}'(\lambda) \mathbb{M}(\lambda)^{-1} \log(\mu - \lambda) d\lambda \right\}.$$

Cette formule montre immédiatement la stabilité de  $P_\gamma$  par rapport à un paramètre. Elle entraîne en particulier les deux corollaires suivants, dont le premier a été énoncé par Schmutzler [19] :

**Corollaire 1.** *Si  $y \mapsto \mathbb{M}_y(\cdot)$  est dans  $C^m$  ( $m \in \{0, 1, \dots; \infty; \omega\}$ ), alors  $y \mapsto P_\gamma$  est dans  $C^m$ , i. e. les coefficients du polynôme  $P_\gamma$  (pas les racines !) sont continus, resp. différentiables, analytiques, etc.*

**Corollaire 2.** *Si  $\mathcal{J} \supseteq y \mapsto \mathbb{M}_y(\cdot)$  est dans  $C^m(\mathcal{J})$ , alors la collection des espaces de dimension finie*

$$\mathcal{B}_y := \mathcal{O}(\overline{D}) / \mathbb{M}_y \cdot \mathcal{O}(\overline{D})$$

*est un fibré sur  $\mathcal{J}$  de classe  $C^m$  et de dimension  $\dim \mathcal{B}_y = \deg P_\gamma = \sum_{\nu \in D} m(\nu)$ . ( $\mathcal{O}(\overline{D})$  désigne successivement l'espace des fonctions holomorphes dans  $\overline{D}$  à valeurs dans  $Y$ , resp.  $X$ .)*

Comme *application*, on prend la famille des problèmes de Sturm-Liouville généralisés

$$\mathbb{M}_y(\lambda) = (M_y(\lambda, \partial_\theta), C_y(\lambda, \partial_\theta))$$

comme opérateurs entre des espaces de Sobolev convenables.

Soit pour  $y_0 \in E$ ,  $\{b_j^0(\lambda) \mid j = 1, \dots, \deg P_\gamma\}$  une base de  $\mathcal{B}_{y_0} \subset C^\infty([0, \omega(y_0)])$ . Alors

$$v_j(y, r, \theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma r^\lambda \mathbb{M}_y(\lambda)^{-1} \mathbb{M}_{y_0}(\lambda) b_j^0(\lambda, \theta) d\lambda$$

définit localement un ensemble générateur pour les singularités “primaires”, i. e. pour des seconds membres plats.

## Représentation en variable complexe

Alors que les corollaires précédents s'appliquent au cas d'une codimension  $n'$  quelconque et permettent de décrire les exposants  $\nu_\kappa$  et les fonctions angulaires  $\varphi$  en termes d'un problème aux valeurs propres généralisé, c'est pour le cas  $n' = 2$  qu'on peut donner des constructions encore plus explicites. On obtient en effet des formules de nature algébrique qui permettent de calculer un ensemble générateur de fonctions singulières par des intégrales de contour sur deux niveaux symboliques différents.

Comme motivation, on a l'exemple du laplacien, où les fonctions singulières de la forme  $r^\lambda \varphi(\lambda, \theta)$  sont toujours des combinaisons de  $r^\lambda \cos \lambda \theta$  et de  $r^\lambda \sin \lambda \theta$ , ou aussi, de  $\zeta^\lambda$  et de  $\bar{\zeta}^\lambda$ , où  $\zeta = r e^{i\theta}$  est l'écriture complexe de la variable  $z$ . Les termes logarithmiques s'obtiennent comme dérivées en  $\lambda$  de ces fonctions.

Pour le cas général, on regarde d'abord l'espace

$$\mathfrak{W}_y(\lambda) := \left\{ w(\lambda, r, \theta) \mid M_y(\lambda)w = 0; w \text{ homogène de degré } \lambda \text{ en } r \right\}.$$

On trouve des éléments de  $\mathfrak{W}_y(\lambda)$  de la façon suivante : par transformation de Cayley du symbole de l'opérateur  $M_y(\partial_{z_1}, \partial_{z_2})$ , on définit

$$\begin{aligned} \sigma_y^+(\alpha) &:= M_y(\alpha + 1, i(\alpha - 1)) \\ \sigma_y^-(\alpha) &:= M_y(1 + \alpha, i(1 - \alpha)). \end{aligned}$$

On a : si  $\sigma_y^+(\alpha^+) = 0$ , alors  $(\alpha^+ \zeta + \bar{\zeta})^\lambda \in \mathfrak{W}_y(\lambda)$  ;  
si  $\sigma_y^-(\alpha^-) = 0$ , alors  $(\zeta + \alpha^- \bar{\zeta})^\lambda \in \mathfrak{W}_y(\lambda)$ .

Le problème est le branchement des racines de  $\sigma_y^\pm$ . On le résout encore une fois par une intégrale de contour : maintenant le contour est  $\gamma_1$  le cercle unité qui, grâce à l'ellipticité de  $M_y$ , ne contient pas de racines de  $\sigma_y^\pm$ . On définit ainsi

$$\mathfrak{W}_y^\pm(\lambda) = \left\{ \int_{\gamma_1} Z^\pm(\lambda, \zeta, \bar{\zeta}, \alpha) \frac{q(\alpha)}{\sigma_y^\pm(\alpha)} d\alpha \mid q \in \mathbb{P}_{m-1} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{avec } Z^+(\lambda, \zeta, \zeta^*, \alpha) &= (\alpha \zeta + \zeta^*)^\lambda \\ Z^-(\lambda, \zeta, \zeta^*, \alpha) &= (\zeta + \alpha \zeta^*)^\lambda. \end{aligned}$$

Une définition similaire est possible (avec des matrices  $\mathbf{Z}^\pm$ ) pour le cas des systèmes elliptiques au sens de ADN (cf [6]).

**Proposition.** *La dimension de  $\mathfrak{W}_y(\lambda)$  est égale à  $2m$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  et*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} : \quad \mathfrak{W}_y(\lambda) = \mathfrak{W}_y^+(\lambda) \oplus \mathfrak{W}_y^-(\lambda).$$

De façon plus générale, on peut décrire maintenant un ensemble générateur de fonctions singulières :

On définit d'abord

$$w(\lambda, y, \zeta, \zeta^*) := \int_{\gamma_1} Z^\pm(\lambda, \zeta, \zeta^*, \alpha) \frac{q(y, \alpha)}{\alpha^k \sigma_y^\pm(\alpha)^\ell} d\alpha.$$

Ici  $k, \ell \in \mathbb{N}$  (bornés) et les  $q(y, \alpha)$  sont des polynômes en  $\alpha$  (en nombre fini). On obtient ensuite les fonctions  $v$  sous la forme

$$v(y, r, \theta) = \int_{\gamma} w(\lambda, y, \zeta, \bar{\zeta}) \frac{\tilde{q}(\lambda, y)}{\tilde{p}_\gamma(\lambda, y)} d\lambda.$$

Ici les  $\tilde{q}(\lambda, y)$  sont des polynômes en  $\lambda$  quelconques (en nombre fini), et  $\tilde{p}_\gamma(\lambda, y)$  est le polynôme en  $\lambda$  construit à partir du polynôme caractéristique  $P_\gamma(\lambda)$  de  $\mathbb{M}_y(\lambda)$  relatif à  $\text{int } \gamma$  par

$$\tilde{p}_\gamma(\lambda) = P_\gamma(\lambda) \cdot \left(P_{\gamma-1}(\lambda-1)\right)^2 \cdots \left(P_{\gamma-L}(\lambda-L)\right)^2 \cdot p_0(\lambda)$$

où  $L \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma-j$  est le contour décalé par  $j$ , et  $p_0$  est un polynôme à racines entières.

## Références

- [1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964) 35–92.
- [2] B. ANDERSSON, U. FALK, I. BABUŠKA. Reliable determination of edge and vertex stress intensity factors in three-dimensional elastomechanics. In *17th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, Stockholm 1990. ICAS-90-4.9.2*, pages 1730–1746. AIAA, Washington 1990.
- [3] M. COSTABEL, M. DAUGE. Développement asymptotique le long d'une arête pour des équations elliptiques d'ordre 2 dans  $\mathbb{R}^3$ . *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* **312** (1991) 227–232.
- [4] M. COSTABEL, M. DAUGE. General edge asymptotics of solutions of second order elliptic boundary value problems I. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique R91016, Université Paris VI 1991. To appear in Proc. Royal Soc. Edinburgh.
- [5] M. COSTABEL, M. DAUGE. General edge asymptotics of solutions of second order elliptic boundary value problems II. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique R91017, Université Paris VI 1991. To appear in Proc. Royal Soc. Edinburgh.
- [6] M. COSTABEL, M. DAUGE. Construction of corner singularities for Agmon-Douglis-Nirenberg elliptic systems. Preprint Bordeaux, 1992.
- [7] M. COSTABEL, M. DAUGE. Edge asymptotics on a skew cylinder. In B.-W. SCHULZE, H. TRIEBEL, editors, *Symposium "Analysis in Domains and on Manifolds with Singularities"*, Breitenbrunn 1990, Teubner-Texte zur Mathematik, Vol. 131, pages 28–42. B. G. Teubner, Leipzig 1992.

- [8] M. DAUGE. *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains – Smoothness and Asymptotics of Solutions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341. Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [9] I. GOHBERG, P. LANCASTER, L. RODMAN. *Matrix polynomials*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, New York 1982.
- [10] I. GOHBERG, E. SIGAL. An operator generalization of the logarithmic residue theorem and the theorem of Rouché. *Math. USSR Sbornik* **13** (4) (1971) 603–625.
- [11] P. GRISVARD. *Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains*. Pitman, London 1985.
- [12] V. A. KONDRAT’EV. Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.* **16** (1967) 227–313.
- [13] V. A. KONDRAT’EV. Singularities of a solution of Dirichlet’s problem for a second order elliptic equation in a neighborhood of an edge. *Differential Equations* **13** (1970) 1411–1415.
- [14] V. G. MAZ’YA, B. A. PLAMENEVSKII.  $L^p$  estimates of solutions of elliptic boundary value problems in a domain with edges. *Trans. Moscow Math. Soc.* **1** (1980) 49–97.
- [15] V. G. MAZ’YA, J. ROSSMANN. Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten. *Math. Nachr.* **138** (1988) 27–53.
- [16] V. G. MAZ’YA, J. ROSSMANN. On the asymptotics of solutions to the Dirichlet problem for second order elliptic equations in domains with critical angles on the edges. Preprint LiTH-MAT-R-91-37, Linköping University 1991.
- [17] R. MELROSE. Pseudo-differential operators on manifolds with corners. Manuscript MIT, Boston 1987.
- [18] V. A. NIKISHKIN. Singularities of the solution of the Dirichlet problem for a second order equation in a neighborhood of an edge. *Moscow Univ. Math. Bull.* **34**(2) (1979) 53–64.
- [19] B. SCHMUTZLER. About the structure of branching asymptotics for elliptic boundary value problems in domains with edges. In B.-W. SCHULZE, H. TRIEBEL, editors, *Symposium “Analysis in Domains and on Manifolds with Singularities”, Breitenbrunn 1990*, Teubner-Texte zur Mathematik, Vol. 131, pages 201–207. B. G. Teubner, Leipzig 1992.
- [20] B. W. SCHULZE. *Pseudo-differential operators on manifolds with singularities*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 24. North-Holland, Amsterdam 1991.

**Martin Costabel**, CeReMaB, Université de Bordeaux 1  
351, cours de la Libération, 33405 TALENCE Cedex (FRANCE)

**Monique Dauge**, Département de Mathématiques, Université de Nantes  
2, rue de la Houssinière, 44072 NANTES Cedex 03 (FRANCE)