Problèmes aux limites avec conditions intégrales pour le Laplacien dans un polygone

Martin COSTABEL
IRMAR, Campus de Beaulieu, Université de Rennes 1, F–35042 RENNES Cedex

Monique DAUGE
Département de Mathématiques, Université de Nantes, F–44072 NANTES Cedex 03

1 INTRODUCTION

Soit Ω un polygone plan. On s'intéresse à la régularité des solutions de problèmes du type:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u & = & f & \text{dans} \quad \Omega \\ 2a\, V(\gamma_1 u) + 2b\, K(\gamma_0 u) + \gamma_0 u & = & g & \text{sur} \quad \partial\Omega\,, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

où $\gamma_0 u$ est la première trace de u et $\gamma_1 u$ est la trace de la dérivée normale extérieure de u. Les opérateurs V et K sont les opérateurs intégraux classiquement associés au Laplacien:

$$V\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \varphi(y)\ \log|y-x|\ ds_y \tag{1.2}$$

et

$$Kv(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} v(y)\ \partial_{n(y)} \log|y-x|\ ds_y \tag{1.3}$$

où $\partial_{n(y)}$ est la dérivée normale extérieure.

Les cas particuliers intéressants sont:

1. $a=-1$, $b=1$: le problème (1.1) est mal posé puisque toute fonction harmonique dans Ω satisfait l'équation intégrale

$$-2V(\gamma_1 u)+2K(\gamma_0 u)+\gamma_0 u=0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

2. $a=1$, $b=-1$: on obtient alors l'équation intégrale satisfaite par une fonction harmonique à l'extérieur de Ω, et le problème (1.1) est en relation avec un problème de transmission.

3. $a=1$, $b=0$: c'est le problème posé...

On suppose que u est dans $H^1(\Omega)$, mais que f est dans $L^2(\Omega)$ et g dans $H^{3/2}(\Omega)$. Si Ω était régulier, la régularité attendue pour u serait $H^2(\Omega)$. La présence des coins peut produire des singularités. Selon la théorie générale, il suffit de déterminer, pour chaque sommet de Ω, les exposants de singularités $\lambda\in\mathbb{C}$ de partie réelle comprise entre 0 et 1. Un sommet $\mathcal{O}$ de Ω étant fixé, soit ω son ouverture et soit (r,θ) les coordonnées polaires centrées en $\mathcal{O}$ telles que les côtés adjacents de Ω soient $\theta=0$ et $\theta=\omega$. Les exposants associés à ce sommet sont les nombres complexes λ tels qu'il existe une fonction non nulle $\tilde{u}$ de θ telle que

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\Big(r^\lambda\tilde{u}(\theta)\Big) &=& 0 & \text{dans} \quad \Gamma_\omega \\ \Big(2a\,V\circ\gamma_1+2b\,K\circ\gamma_0+\gamma_0\Big)\Big(r^\lambda\tilde{u}(\theta)\Big) &=& 0 & \text{sur} \quad \partial\Gamma_\omega\,, \end{array}\right. \tag{1.4}$$

où Γ_ω est le secteur de côtés $\theta=0$ et $\theta=\omega$. Par troncature en dehors d'un voisinage de $\mathcal{O}$, cette fonction engendrera une solution du problème (1.1) avec $f\in\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $g\in\mathscr{C}^\infty(\partial\Omega)$.

2 PRÉPARATION DU CALCUL DES EXPOSANTS

Vu l'équation à l'intérieur, on va chercher $\tilde{u}$ sous la forme d'une combinaison linéaire de $\tilde{u}_1=\sin\lambda\theta$ et $\tilde{u}_2=\cos\lambda\theta$. Les calculs seront grandement facilités si on choisit une base de l'espace des $\tilde{u}$ de façon à respecter la symétrie par rapport à la bissectrice de Γ_ω. On choisit donc comme base

$$\tilde{u}_0(\theta)=\sin\lambda\theta \quad \text{et} \quad \tilde{u}_\omega(\theta)=\sin\lambda(\omega-\theta).$$

On a:

$$\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{u}_\omega\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{A}=\frac{1}{\sin\lambda\omega}\begin{pmatrix}\sin\lambda\omega & 0\\ \cos\lambda\omega & 1\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Représentant sur la première ligne les traces en $\theta=0$ et sur la seconde les traces en $\theta=\omega$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_0(r^\lambda\tilde{u}_0,r^\lambda\tilde{u}_\omega)=r^\lambda\boldsymbol{D} \qquad &\text{avec} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0 & \sin\lambda\omega\\ \sin\lambda\omega & 0\end{pmatrix} \\ \gamma_1(r^\lambda\tilde{u}_0,r^\lambda\tilde{u}_\omega)=\lambda\,r^{\lambda-1}\boldsymbol{N} \qquad &\text{avec} \qquad \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}-1 & \cos\lambda\omega\\ \cos\lambda\omega & -1\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il est clair que

$$\gamma_0(r^\lambda\tilde u_1, r^\lambda\tilde u_2) = r^\lambda \boldsymbol{DA} \quad \text{et} \quad \gamma_1(r^\lambda\tilde u_1, r^\lambda\tilde u_2) = \lambda\, r^{\lambda-1}\boldsymbol{NA}. \tag{2.3}$$

Il reste à calculer l'action de l'opérateur V, resp. K, sur des fonctions de la forme $\lambda\, r^{\lambda-1}$, resp. r^λ, sur chacun des côtés de Γ_ω. On adopte les conventions suivantes:

1. On intègre le coefficient 2 dans les calculs.
2. On présente les opérateurs sous forme de matrice 2×2 indexée par $j,k\in\{0,\omega\}$. Le coefficient d'indice (j,k) correspond à prendre x sur la droite $\theta=j$ et y sur la droite $\theta=k$.

Une réduction préliminaire consiste à écrire x et y sous forme complexe et à décomposer le noyau de Green $\log|y-x|$ sous la forme $\log|1-\frac{x}{y}|+\log|y|$. La contribution de $\log|y|$ se réduit à une constante en ce qui concerne V et à 0 en ce qui concerne K. La contribution de $\log|1-\frac{x}{y}|$ appliqué à une fonction homogène de degré $\lambda-1$ est une fonction homogène de degré λ. C'est pourquoi on introduit

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_{0,0} & V_{0,\omega} \\ V_{\omega,0} & V_{\omega,\omega}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} K_{0,0} & K_{0,\omega} \\ K_{\omega,0} & K_{\omega,\omega}\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

où

$$\begin{aligned}
V_{0,0} &= -\frac{1}{\pi}\, r^{-\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda\, s^{\lambda-1}\, \log|1-\frac{r}{s}|\, ds,\\
V_{0,\omega} &= -\frac{1}{\pi}\, r^{-\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda\, s^{\lambda-1}\, \log|1-\frac{r}{s\,e^{i\omega}}|\, ds,\\
V_{\omega,0} &= -\frac{1}{\pi}\, r^{-\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda\, s^{\lambda-1}\, \log|1-\frac{r\,e^{i\omega}}{s}|\, ds,\\
V_{\omega,\omega} &= -\frac{1}{\pi}\, r^{-\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda\, s^{\lambda-1}\, \log|1-\frac{r\,e^{i\omega}}{s\,e^{i\omega}}|\, ds
\end{aligned} \tag{2.5}$$

et les coefficients de $\boldsymbol{K}$ sont définis de manière analogue (voir §3). Alors

LEMME 2.1 *Les exposants de singularités contenus dans la bande* $0<\operatorname{Re}\lambda<1$ *sont les* λ *pour lesquels la matrice*

$$\boldsymbol{B}(\lambda) := \Big(a\,\boldsymbol{V}(\lambda)\times\boldsymbol{N}(\lambda) + b\,\boldsymbol{K}(\lambda)\times\boldsymbol{D}(\lambda)+\boldsymbol{D}(\lambda)\Big)\times\boldsymbol{A}(\lambda) \tag{2.6}$$

n'est pas inversible. De plus, si (c_1,c_2) *est un élément non nul du noyau de* $\boldsymbol{B}(\lambda)$, *alors la fonction* $\tilde u$ *définie par* $c_1\tilde u_1 + c_2\tilde u_2$ *est solution du problème* (1.4) *et, pour tout* χ *fonction de troncature* $\mathscr{C}^\infty$ *qui vaut* 1 *au voisinage de* $\mathcal{O}$, *la fonction* $\chi(r)\, r^\lambda\tilde u(\theta)$ *est une singularité du problème* (1.1).

3 CALCUL DES EXPOSANTS

On commence par calculer les matrices $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{K}$. On utilisera l'identité, valable pour $\operatorname{Re}\mu\in(-1,0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mu\tau}}{e^{-\tau\pm i\omega}-1}\, d\tau = \pi\,\frac{e^{\pm i\mu(\omega-\pi)}}{\sin\mu\pi}. \tag{3.1}$$

• Pour $\boldsymbol{V}$, on fait le changement de variables $t = r/s$ et de (2.5) on tire

$$V_{0,0} = V_{\omega,\omega} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda\, t^{-\lambda-1} \,\mathrm{Re}\,\log(1-t)\, dt,$$

$$V_{0,\omega} = V_{\omega,0} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda\, t^{-\lambda-1} \,\mathrm{Re}\,\log(1-t\,e^{i\omega})\, dt.$$

Pour $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1$, les intégrales ci-dessus sont convergentes, on peut intégrer par parties, le terme tout intégré est nul. Ainsi

$$V_{0,\omega} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-\lambda}\left(\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\omega}}{1-t\,e^{i\omega}}\right) dt.$$

Le changement de variables $t = e^{-\tau}$ donne

$$V_{0,\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\lambda-1)\tau}\left(\frac{e^{i\omega}}{1-e^{-\tau+i\omega}} + \frac{e^{-i\omega}}{1-e^{-\tau-i\omega}}\right) d\tau$$

Grâce à (3.1) pour $\mu = \lambda - 1$, on obtient

$$V_{0,\omega} = -\,\frac{\cos\lambda(\omega-\pi)}{\sin\lambda\pi}\,.$$

D'où l'on déduit finalement

$$\boldsymbol{V} = -\,\frac{1}{\sin\lambda\pi}\begin{pmatrix} \cos\lambda\pi & \cos\lambda(\omega-\pi) \\ \cos\lambda(\omega-\pi) & \cos\lambda\pi \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

• Pour $\boldsymbol{K}$, on part de l'expression, écrite en variables réelles

$$\partial_{n(y)} \log|y-x| = \frac{< n(y), y-x >}{|y-x|^2}$$

ce qui donne, en écriture complexe

$$\partial_{n(y)} \log|y-x| = \mathrm{Re}\,\frac{n(y)}{y-x}\,.$$

En particulier, si x et y sont sur la même droite réelle, $\partial_{n(y)} \log|y-x| = 0$. On en déduit que $K_{0,0} = K_{\omega,\omega} = 0$ et que pour $K_{0,\omega}$ et $K_{\omega,0}$ on peut remplacer le noyau $\partial_{n(y)} \log|y-x|$ par

$$\partial_{n(y)} \log|1-\frac{x}{y}| = \mathrm{Re}\left(\frac{n(y)}{y}\;\frac{1}{\frac{y}{x}-1}\right).$$

Sur le côté $\theta = 0$, on a $y = s$ et $n(y) = -i$. D'où

$$K_{\omega,0} = -\frac{1}{\pi}\, r^{-\lambda}\int_0^{+\infty} s^{\lambda}\;\mathrm{Re}\left(\frac{-i}{s}\;\frac{1}{\frac{s}{r\,e^{i\omega}}-1}\right) ds.$$

Sur le côté $\theta = \omega$, on a $y = s\,e^{i\omega}$ et $n(y) = i\,e^{i\omega}$. D'où

$$K_{0,\omega} = -\frac{1}{\pi}\, r^{-\lambda}\int_0^{+\infty} s^{\lambda}\;\mathrm{Re}\left(\frac{i}{s}\;\frac{1}{\frac{s\,e^{i\omega}}{r}-1}\right) ds.$$

Ainsi $K_{\omega,0} = K_{0,\omega}$. Le changement de variables $t = s/r$ donne

$$K_{0,\omega} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}\ \mathrm{Re}\Big(\frac{i}{t\,e^{i\omega}-1}\Big)\,dt.$$

L'intégrale converge pour $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1$ et le changement de variables $t = e^{-\tau}$ donne

$$K_{0,\omega} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\,\Big(\frac{i}{e^{-\tau+i\omega}-1} - \frac{i}{e^{-\tau-i\omega}-1}\Big)\,d\tau.$$

Grâce à (3.1) pour $\mu = -\lambda$, on obtient

$$K_{0,\omega} = \frac{\sin\lambda(\omega-\pi)}{\sin\lambda\pi}\,.$$

D'où l'on déduit finalement

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{\sin\lambda\pi}\begin{pmatrix} 0 & \sin\lambda(\omega-\pi) \\ \sin\lambda(\omega-\pi) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

• Les expressions (2.6), (2.2), (3.2) et (3.3) donnent

$$\boldsymbol{B}(\lambda) = \frac{\sin\lambda\omega}{\sin\lambda\pi}\begin{pmatrix} (a+b)\,\sin\lambda(\omega-\pi) & (a+1)\,\sin\lambda\pi \\ (a+1)\,\sin\lambda\pi & (a+b)\,\sin\lambda(\omega-\pi) \end{pmatrix} \times \boldsymbol{A}. \tag{3.4}$$

D'où

$$\det\boldsymbol{B}(\lambda) = \frac{\sin\lambda\omega}{\sin^2\lambda\pi}\,\Big((a+b)^2\,\sin^2\lambda(\omega-\pi) - (a+1)^2\,\sin^2\lambda\pi\Big). \tag{3.5}$$

4 SINGULARITÉS, RÉGULARITÉ, CAS PARTICULIERS

Un phénomène général est que la première singularité du problème de Dirichlet, qui est $r^{\pi/\omega}\sin(\theta\pi/\omega)$, est toujours une singularité du problème (1.1). En effet, $\det\boldsymbol{B}(\frac{\pi}{\omega})$ est toujours nul et on vérifie que

$$\boldsymbol{B}(\frac{\pi}{\omega})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

4.1 Cas où $a = -1$ et $b = 1$

Dans ce cas le déterminant de $\boldsymbol{B}(\lambda)$ est toujours nul. Le problème aux limites correspondant n'est pas elliptique.

4.2 Cas où $a = 1$ et $b = -1$

Le déterminant de $\boldsymbol{B}(\lambda)$ est égal à $-4\sin\lambda\omega$, comme dans le cas du simple problème de Dirichlet. Dans ce cas, on peut exprimer facilement toute solution u de (1.1) comme somme d'une solution u_1 d'un problème de transmission et d'une solution u_2 d'un problème de Dirichlet : il suffit de poser, avec $\Omega^- = \Omega$ et Ω^+ le complémentaire de Ω

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} \Delta u_1^- & = & f & \text{dans} & \Omega^- & \text{et} & \Delta u_1^+ & = 0 & \text{dans}\ \Omega^+ \\ [\gamma_0 u_1] & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega & \text{et} & [\gamma_1 u_1] & = 0 & \text{sur}\ \partial\Omega\,, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

et

$$
\begin{cases}
\Delta u_2 &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\
u_2 &= \dfrac{g}{2} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\,.
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

Montrons que $u := u_1^- + u_2$ est bien solution du problème (1.1) pour $a = 1$ et $b = -1$. On a bien $\Delta u = f$. D'autre part, comme les sauts sont nuls on a :

$$
2\,V(\gamma_1 u_1^-) - 2\,K(\gamma_0 u_1^-) + \gamma_0 u_1^- = 2\,V(\gamma_1 u_1^+) - 2\,K(\gamma_0 u_1^+) + \gamma_0 u_1^+,
$$

qui est nul car u_1^+ est harmonique à l'extérieur de Ω. Donc

$$
2\,V(\gamma_1 u) - 2\,K(\gamma_0 u) + \gamma_0 u = 2\,V(\gamma_1 u_2) - 2\,K(\gamma_0 u_2) + \gamma_0 u_2. \tag{4.3}
$$

Or, comme u_2 est harmonique à l'intérieur, on a la relation

$$
2\,V(\gamma_1 u_2) - 2\,K(\gamma_0 u_2) - \gamma_0 u_2 = 0. \tag{4.4}
$$

Donc (4.3) et (4.4) donnent que $2\,V(\gamma_1 u) - 2\,K(\gamma_0 u) + \gamma_0 u = 2\gamma_0 u_2$. D'où, avec (4.2), le résultat.

Comme, si f est dans $L^2(\Omega)$, la fonction F définie comme le prolongement de f par 0 en dehors de Ω est dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, est que u_1 satisfait à $\Delta u_1 = F$ sur tout $\mathbb{R}^2$, $u_1^- \in H^2(\Omega)$. Donc les singularités de u sont celles de u_2, à savoir celles du problème de Dirichlet avec trace dans $H^{3/2}(\partial\Omega)$.

4.3 Autres cas

Dans les autres cas, les solutions du problème (1.1) sont aussi en relation avec un problème de transmission et le problème de Dirichlet mais de façon plus imbriquée. La première étape consiste à se ramener à $f = 0$ sans introduire de singularités (quitte à modifier g par une fonction régulière). On suppose donc que u est solution du problème (1.1) avec $f = 0$.

LEMME 4.1 *On suppose que $(a, b) \neq (-1, 1)$.*
1. *Si u_1 est solution du problème de transmission*

$$
\begin{cases}
\Delta u_1^- &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega^- \\
\Delta u_1^+ &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega^+ \\
(2a+b+1)\gamma_0 u_1^+ - (1-b)\gamma_0 u_1^- &= g \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega \\
[\gamma_1 u_1] &= 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega\,,
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

soit $w = \gamma_0 u_1^+ - \gamma_0 u_1^-$ le saut de $\gamma_0 u_1$. Alors la solution v du problème de Dirichlet

$$
\begin{cases}
\Delta v &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \\
v &= w \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega
\end{cases}
\tag{4.6}
$$

est solution du problème (1.1) avec $f = 0$.
2. *Inversement, si u est solution du problème (1.1) avec $f = 0$, alors il existe une solution u_1 du problème (4.5) telle que u soit solution du problème (4.6) avec $w = [\gamma_0 u_1]$.*

Démonstration: On note d'abord que le problème de transmission (4.6) a bien un sens parce que $(1-b)$ et $(2a+b+1)$ ne sont pas nuls en même temps.
1. Soit u_1 solution de (4.5). On a, puisque u_1 est harmonique à l'intérieur et à l'extérieur, et comme le saut de $\gamma_1 u_1$ est nul :

$$(2K+1)\gamma_0 u_1^- = 2V(\gamma_1 u_1^-) = 2V(\gamma_1 u_1^+) = (2K-1)\gamma_0 u_1^+ . \tag{4.7}$$

Introduisant w, on a donc

$$2Kw + w - 2\gamma_0 u_1^+ = 0. \tag{4.8}$$

La condition de saut sur $\gamma_0 u_1$ donne la relation

$$2(a+b)\gamma_0 u_1^+ = g + (b-1)w\,. \tag{4.9}$$

Reportant ceci dans (4.8), on obtient

$$\Big((a+1) + 2(a+b)K\Big)w = g\,. \tag{4.10}$$

La solution de (4.6) étant harmonique à l'intérieur, on a $V(\gamma_1 v) = (\frac{1}{2}+K)(\gamma_0 v)$. Donc

$$2a\,V(\gamma_1 v) + 2b\,K(\gamma_0 v) + \gamma_0 v = \Big((a+1) + 2(a+b)K\Big)w\,. \tag{4.11}$$

La relation (4.10) donne donc que v est solution de (1.1).
2. Inversement, si u est solution de (1.1) avec $f=0$, sa première trace w satisfait (4.10). On définit $u_1 = \mathscr{D}w$. Alors u_1 vérifie:

$$\begin{cases} \Delta u_1^- &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^- \quad \text{et} \quad \Delta u_1^+ = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^+ \\ [\gamma_0 u_1] &= w \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad \text{et} \quad [\gamma_1 u_1] = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\,, \end{cases}$$

Comme les relations (4.8) et (4.10) impliquent la relation de saut (4.9), on en déduit que u_1 est solution du problème (4.5). ■

REMARQUE 4.2 Noter, *cf* [1], que les exposants des singularités du problème de transmission (4.5) sont les zéros de la fonction

$$(a+b)^2 \sin^2 \lambda(\omega - \pi) - (a+1)^2 \sin^2 \lambda\pi. \tag{4.12}$$

Soit $\lambda_0(\omega)$ le plus petit zéro > 0 de la fonction (4.12). D'après la théorie générale, $u \in H^{s+1}(\Omega)$ pour tout $s \leq 1$ et $s < \min\{\lambda_0(\omega), \frac{\pi}{\omega}\}$. ■

REMARQUE 4.3 La résolution du problème de transmission (4.5) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale (4.10). Si μ défini par

$$\mu = \frac{1-b}{2a+b+1}\,,$$

la condition de transmission porte sur $\gamma_0 u_1^+ - \mu\gamma_0 u_1^-$, et (4.5) est uniquement résoluble si $\mu > 0$. ■

4.4 Cas $a = 1$, $b = 0$

La fonction

$$\sin^2 \lambda(\omega - \pi) - 4 \sin^2 \lambda\pi.$$

a toujours un zéro contenu entre 0 et 1. Le minimum est atteint pour les angles $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$ et vaut $\frac{5}{6}$. Ainsi en particulier, on a, pour tout angle convexe, $u \in H^{1+\frac{5}{6}-\varepsilon}(\Omega)$, $\forall\varepsilon > 0$, et tout angle concave $u \in H^{1+\frac{\pi}{\omega}-\varepsilon}(\Omega)$.

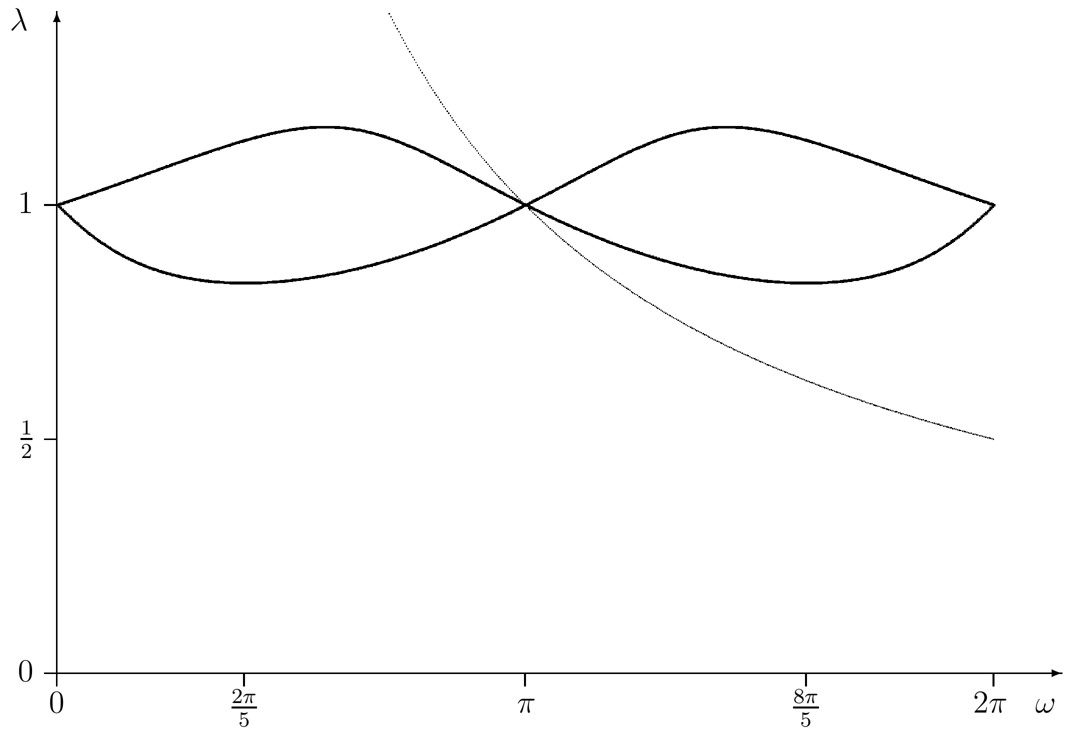

Figure 1: Les exposants de singularités

REFERENCES

1. M. Costabel, E. P. Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *J. Math. Anal. Appl.* **106** (1985) 367–413.