

SINGULARITÉS D'ARÊTE DANS UN CYLINDRE OBLIQUE

Martin Costabel et Monique Dauge

Heidelberg et Nantes

1. POSITION DU PROBLÈME

1.a Origine. Ce problème provient d'une question posée au premier auteur par I. Babuška (Maryland).

Il est bien connu que les singularités du domaine font apparaître une perte de régularité pour les solutions de tout problème aux limites elliptique. La situation est assez bien décrite quand les singularités sont des points isolés du bord et sont de type conique (voir [4], [8]).

Quand une singularité conique est tensorisée par un espace affine, on obtient une arête. Les résultats de régularité sont assez complets dans ce cas, cf. [6], [11]. Si l'opérateur est invariant par translation le long de l'arête, alors on peut déduire les singularités directement à partir des singularités sur le domaine conique correspondant, cf. [1].

Mais pour les exemples physiques dans l'espace ordinaire de dimension trois, si un domaine borné a des arêtes et pas de coins, les arêtes sont nécessairement courbes. L'exemple le plus simple est un cylindre à base circulaire, coupé perpendiculairement à ses lignes génératrices. Mais c'est un exemple très particulier: l'ouverture de l'arête est $\pi/2$ partout et sa courbure est constante. Si on coupe le cylindre par un plan oblique par rapport aux lignes génératrices, alors l'arête est elliptique et l'angle d'ouverture est variable. Cela entraîne des difficultés pour l'analyse précise de la structure de la solution, à cause du fait que les singularités dans les domaines plans correspondants ne dépendent pas continûment du paramètre d'ouverture. En particulier, les coefficients des fonctions singulières le long de l'arête ("stress intensity factors") vont exploser en certains points. De plus, un tel comportement paraît incompatible avec l'approximation numérique de ces coefficients.

1.b Géométrie du domaine. Soit B un domaine analytique borné dans \mathbb{R}^2 . Soit Ψ une fonction affine $(x_2, x_3) \mapsto x_1 = \Psi(x_2, x_3)$. Nous supposons que

$$\forall (x_2, x_3) \in \overline{B}, \quad \Psi(x_2, x_3) > 0.$$

Nous introduisons

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_2, x_3) \in B, 0 < x_1 < \Psi(x_2, x_3) \right\}.$$

C'est notre cylindre oblique. Nous notons M l'arête supérieure et $\partial_1\Omega$ le côté vertical du cylindre:

$$\partial_1\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_2, x_3) \in \partial B, 0 < x_1 < \Psi(x_2, x_3) \right\}.$$

L'union du haut et du bas du cylindre est notée $\partial_2\Omega$.

Pour ce que nous allons faire, on peut admettre une classe plus générale de domaines: les domaines analytiques par morceaux avec arêtes tels qu'au voisinage de chaque point d'une arête, il existe un difféomorphisme local analytique qui envoie le domaine dans un dièdre droit.

Voici un exemple d'un tel domaine. Si Ψ_1 et Ψ_2 sont analytiques sur \mathbb{R}^2 et tels que

$$\forall (x_2, x_3) \in \overline{B}, \quad \Psi_1(x_2, x_3) < \Psi_2(x_2, x_3),$$

nous pouvons définir:

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_2, x_3) \in B, \Psi_1(x_2, x_3) < x_1 < \Psi_2(x_2, x_3) \right\}.$$

Nous obtenons ainsi un cylindre avec des extrémités courbes. Une telle situation est utile en réaction-diffusion, par exemple.

Des extensions intéressantes pourraient être:

1. Inclure la situation où un point isolé de l'arête a un angle d'ouverture égal à π . Une telle situation apparaît par exemple si deux cylindres obliques isométriques sont accolés par leur extrémité oblique.
2. Inclure des variétés C^∞ par morceaux avec arêtes.
3. Inclure des singularités d'ordre supérieur (coins de toutes dimensions).

1.c Problèmes aux limites. Nous choisissons deux exemples simples: un problème mêlé et le problème de Neumann pour le Laplacien. Notons (\mathcal{P}_I) , resp. (\mathcal{P}_{II}) ces deux problèmes. Nous écrivons

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_I) \quad & \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial_1\Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h_2 & \text{sur } \partial_2\Omega. \end{cases} \\ (\mathcal{P}_{II}) \quad & \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h_1 & \text{sur } \partial_1\Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h_2 & \text{sur } \partial_2\Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous prenons le Laplacien parce que c'est l'exemple d'opérateur elliptique le plus simple possible. De plus, il est significatif en physique. Nous choisissons le problème mêlé de Dirichlet-Neumann, parce que les singularités apparaissent à un bas niveau de régularité (génériquement, $u \notin H^2(\Omega)$). Nous considérons aussi le problème de Neumann, parce qu'il ne satisfait pas la condition d'isomorphisme dans les espaces de Sobolev à poids qui est utilisée par [6], [9]. Enfin le comportement des solutions de tels problèmes dans un secteur plan est bien connu, cf. [2].

D'autres problèmes aux limites se comportent comme (\mathcal{P}_I) et (\mathcal{P}_{II}) . Comme opérateur intérieur, nous pouvons prendre n'importe quel opérateur elliptique du second ordre à coefficients analytiques réels. Nous associerions à de tels opérateurs n'importe quelle condition aux limites de Dirichlet-Neumann (dont les problèmes de Dirichlet et de Neumann), où la condition de Neumann est définie à l'aide de la dérivée conormale associée à l'opérateur intérieur. Ainsi nous obtenons, avec notre classe de domaines analytiques par morceaux, une classe de problèmes aux limites invariante par difféomorphismes analytiques.

Nous pouvons aussi considérer des problèmes mêlés aux dérivées obliques dans un cadre proche de celui de [7]; certains de ces problèmes ne sont plus variationnels, mais seulement semi-variationnels.

1.d Exposants des singularités. Rappelons d'abord le résultat pour un secteur plan G d'ouverture ω . Nous utilisons des coordonnées polaires (r, θ) de façon que G corresponde à $r > 0$, $0 < \theta < \omega$. Pour tout entier $j \geq 1$, nous posons

$$\begin{aligned} \nu_j &= \begin{cases} (2j-1)\frac{\pi}{2\omega} & \text{pour le problème mêlé} \\ \frac{j\pi}{\omega} & \text{pour le problème de Neumann} \end{cases} \\ \sigma_j(r, \theta) &= r^{\nu_j} \cos \nu_j \theta \\ S_j(r, \theta) &= r^{\nu_j} (\log r \cos \nu_j \theta - \theta \sin \nu_j \theta) \quad \text{si } \nu_j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 Soit $s \in \mathbb{R}$, $s > 1/2$. Supposons que la donnée intérieure dans G a la régularité H^{s-1} et que les données de Neumann ont la régularité $H^{s-\frac{1}{2}}$. Alors la solution variationnelle w du problème mêlé de Neumann-Dirichlet, resp. de Neumann dans G , admet la décomposition suivante:

$$w = w_{\text{reg}} + w_{\text{sing}}$$

où

$$w_{\text{reg}} \in H^{s+1-\varepsilon}(G) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$w_{\text{sing}} = \sum_{1 \leq \nu_j < s, \nu_j \notin \mathbb{N}} c_j \sigma_j + \sum_{1 \leq \nu_j < s, \nu_j \in \mathbb{N}} c_j S_j.$$

Remarque 1.2 Si $\forall j \in \mathbb{N}$, $\nu_j \neq s$, alors $w_{\text{reg}} \in H^{s+1}(G)$. Au contraire, si $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_j = s$, alors w_{reg} n'appartient pas à $H^{s+1}(G)$, en général. Si nous restons dans l'échelle des espaces de Sobolev ordinaires, il est impossible de retirer cet ε . Si on caractérise la préimage, on trouve un espace dans lequel H^{s+1} n'est pas fermé. Réciproquement, l'image de H^{s+1} n'est pas fermée dans $H^{s-1}(G) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial G)$.

Retournons maintenant à notre cylindre oblique. Nous supposons que pour un réel fixé $s > 1/2$

$$f \in H^{s-1}(\Omega)$$

$$h_j \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial_j \Omega), \quad j = 1, 2$$

avec la condition habituelle de compatibilité pour le problème de Neumann. Alors il existe une solution variationnelle $u \in H^1(\Omega)$.

Pour tout $x \in M$, soit $\omega(x)$ l'angle d'ouverture de Ω en x . Nous posons

$$\nu(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\omega(x)} & \text{pour } (\mathcal{P}_I) \\ \frac{\pi}{\omega(x)} & \text{pour } (\mathcal{P}_{II}) \end{cases}$$

Si $s < \min_{x \in M} \nu(x)$, alors $u \in H^{s+1}(\Omega)$. Puisque, de toutes façons, $\min_{x \in M} \nu(x) > 1/2$, nous avons $u \in H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega)$ et la condition de Neumann a un sens. A partir de maintenant nous supposons que

$$\min_{x \in M} \nu(x) < s.$$

Alors nous verrons (voir Théorèmes 2.1 et 3.3) que u peut être décomposé en deux parties pour tout $\varepsilon > 0$,

$$u = u_{\text{reg}} + u_{\text{sing}}$$

où $u_{\text{reg}} \in H^{s+1-\varepsilon}(\Omega)$ et u_{sing} est un développement asymptotique. Une telle décomposition dépend en général de $\varepsilon > 0$. Notre but est de décrire la structure de telles décompositions. En particulier, nous voulons séparer autant que possible les rôles des différentes variables: l'abscisse y le long de l'arête, la distance r par rapport à l'arête et la variable angulaire θ . De plus, nous avons l'intention de séparer ce qui vient du cadre géométrique (domaine et problème aux limites) et ce qui vient des données (f, h_j) . La partie qui vient du cadre géométrique sera décrite par un fibré analytique. La partie qui vient des données sera décrite par des sections $H^{s-\varepsilon}$ de ce fibré. Ce fibré est un objet associé canoniquement à la paire (domaine, problème aux limites).

2. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DANS UN CAS SIMPLE

2.a Un résultat simple. Les exposants des singularités qui apparaissent dans le développement asymptotique le long de l'arête dépendent du paramètre d'arête y . Ce sont les mêmes que pour un problème en dimension deux pour le Laplacien avec des termes d'ordre inférieur et l'ouverture $\omega(y)$, qui est l'ouverture de Ω au point y . Nous pouvons les énumérer grâce à un double indice $k = (k_1, k_2)$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et

$$\nu_{(0,k_2)}(y) = k_2$$

et pour $k_1 \geq 1$,

$$\nu_k(y) = \begin{cases} (2k_1 - 1) \frac{\pi}{2\omega(y)} + k_2 & \text{pour } (\mathcal{P}_I) \\ \frac{k_1\pi}{\omega(y)} + k_2 & \text{pour } (\mathcal{P}_{II}). \end{cases}$$

Ces exposants doivent contenir tous les entiers positifs à cause de la possibilité d'interaction entre polynômes et singularités.

Ce à quoi on peut s'attendre comme développement asymptotique le long de l'arête est

$$\sum_{k,q,\beta} c_{k,q,\beta}(y) r^{\nu_k(y)} \log^q r \varphi_{k,q,\beta}(y, \theta) \quad (2.1)$$

où seuls les $c_{k,q,\beta}$ dépendent des données (f, h_j) . En fait, un tel développement asymptotique sous forme de produit tensoriel ne convient pas en général, parce que les fonctions $c_{k,q,\beta}$ ne sont pas assez régulières: le mieux qu'on puisse attendre est $H^{s-\nu_k(y)}$. Un tel développement asymptotique ne pourrait être valable que si $s = \infty$, ou si la 'partie régulière' est moitié moins régulière que

les données. C'est pourquoi nous introduisons une fonction $\Phi(y, r)$ telle que sa transformée de Fourier partielle vérifie

$$\mathcal{F}_{y \rightarrow \xi} \Phi(\xi, r) = \phi(r|\xi|)$$

où ϕ est une fonction à décroissance rapide, a une transformée de Fourier à support compact et vérifie pour N assez grand

$$\phi(0) = 1, \quad \frac{d^l}{ds^l} \phi(0) = 0 \quad (l = 1, \dots, N).$$

Nous définissons la convolution par rapport à y ,

$$(\Phi * c)(y, r) := \int \Phi(y - y', r) c(y') dy'.$$

Le théorème suivant décrit notre résultat concernant le développement asymptotique d'arête dans un cas simple.

Théorème 2.1 *Soit J un segment ouvert dans M et \tilde{J} un ouvert dans M tel qu'on ait $\bar{J} \subset \tilde{J}$ et soit \mathcal{U}_J un voisinage assez petit de J dans $\bar{\Omega}$. Soit χ un difféomorphisme analytique qui définit sur \mathcal{U}_J des coordonnées cylindriques locales (y, r, θ) avec $0 < \theta < \omega(y)$. En coordonnées locales, nous écrivons I et \tilde{I} pour J et \tilde{J} . Nous supposons qu'il existe $\varepsilon_0 \geq 0$ tel que*

$$\forall k, \quad (\forall y \in \tilde{I}, \nu_k(y) < s) \quad \text{ou} \quad (\forall y \in \tilde{I}, \nu_k(y) \geq s - \varepsilon_0) \quad (2.2)$$

$$\forall y \in \tilde{I}, \quad \text{si } \nu_k(y) = \nu_{k'}(y) < s \quad \text{alors } k = k'. \quad (2.3)$$

Pour tout k il existe un ensemble fini d'indices (q, β) et des fonctions analytiques $\varphi_{k,q,\beta}(y, \theta)$ tels que la solution u du problème (\mathcal{P}_I) ou (\mathcal{P}_{II}) puisse être décomposée en

$$u = u_{\text{reg}} + u_{\text{sing}}.$$

Ici $u_{\text{reg}} \in H^{s+1-\varepsilon}(\mathcal{U}_J) \forall \varepsilon > \varepsilon_0$ et

$$u_{\text{sing}} = \chi^{-1} \left(\sum_{k,q,\beta} (\Phi * c_{k,q,\beta})(y, r) r^{\nu_k(y)} \log^q r \varphi_{k,q,\beta}(y, \theta) \right). \quad (2.4)$$

Les coefficients $c_{k,q,\beta}(y)$ sont définis sur \tilde{I} et vérifient $c_{k,q,\beta} \in H^{s-\nu_k(y)-\varepsilon}(I)$ pour tout $\varepsilon > 0$. La somme est étendue aux k pour lesquels $\nu_k < s$ sur \tilde{I} .

Remarque 2.2 Si $k_1 = 0$ alors il n'y a pas de termes logarithmiques et pour tout $y \in M$ fixé, la fonction $r^{\nu_k(y)} \varphi_{k,0,\beta}(y, \theta)$ est polynômiale en variables cartésiennes. Le terme correspondant dans le développement asymptotique peut être mis dans la partie régulière. Nous incluons de tels termes dans notre développement asymptotique comme préparation à l'étude des points de croisement.

Remarque 2.3 Supposons que $k_2 = 0$ et $\nu_k \notin \mathbb{N}$. Alors $q = 0$ et β n'a qu'une valeur. Nous avons

$$\varphi_{k,0,1}(y, \theta) = \cos \nu_k(y) \theta.$$

Remarque 2.4 Seuls les premiers termes (avec $k_2 = 0$) proviennent directement du symbole conormal principal de l'opérateur. Les autres termes proviennent des autres parties de l'opérateur et il n'y a pas de relation simple entre le symbole de l'opérateur et les singularités. Par exemple, on obtient un terme logarithmique en différentiant $r^{\nu_k(y)}$ par rapport à y .

2.b La question de l'optimalité. Des résultats proches de ceux du Théorème 2.1 ont été démontrés pour le problème de Dirichlet par Kondrat'ev [5] concernant la première singularité, Nikishkin [10] pour toutes les singularités, Maz'ya et Roßmann [9] pour des opérateurs plus généraux. Il nous faut signaler quelques différences entre notre résultat et ceux des auteurs ci-dessus: la première (mais non essentielle) est notre utilisation des espaces avec exposants non entiers. La deuxième est que nos résultats n'exigent pas l'hypothèse d'isomorphisme dans des espaces de Sobolev à poids; cette hypothèse exclut le problème de Neumann, par exemple. La troisième différence se trouve dans notre localisation. Tous les auteurs ci-dessus font l'hypothèse suivante:

$$\forall k, \forall y \in M, \quad \nu_k(y) \neq s. \quad (2.5)$$

Au cas où cette hypothèse est vérifiée, nous pouvons prendre $\varepsilon_0 = 0$ dans notre théorème. Il est intéressant de réaliser qu'une telle hypothèse implique une restriction sévère sur les possibilités pour le couple (α, s) où α définit la pente du haut du cylindre oblique: $0 < \alpha < 1$ et $\beta = \alpha\pi/2$ est l'angle entre le haut du cylindre et le plan des (x_2, x_3) .

Illustrons cette restriction. L'ouverture maximale est $(1 + \alpha)\pi/2$ et l'ouverture minimale est $(1 - \alpha)\pi/2$. On voit facilement que si

$$\nu_{(1,0)} \left((1 - \alpha) \frac{\pi}{2} \right) \geq \nu_{(1,1)} \left((1 + \alpha) \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.6)$$

alors l'union des images de tous les ν_k sur M est un demi-axe complet. La condition (2.6) est remplie dans l'exemple du problème de Neumann (\mathcal{P}_{II}) si

$$\frac{2}{1 - \alpha} \geq \frac{2}{1 + \alpha} + 1,$$

c'est-à-dire, si $\alpha \geq \sqrt{5} - 2 \simeq 0.236$.

Comme nous l'avons déjà expliqué pour les problèmes plans, si la condition (2.5) n'est pas vérifiée, il n'y a pas de régularité optimale pour la partie régulière (voir Remarque 1.2). Même si la condition (2.5) est vérifiée, il est encore difficile d'obtenir l'optimalité. Seul [9] énonce l'optimalité quand il n'y a pas de terme logarithmique dans le développement asymptotique et que de plus $s - \nu_{(1,0)} < 1$.

Concernant la régularité des coefficients, même dans le cas d'une arête droite avec un opérateur invariant par translation, quand des termes logarithmiques apparaissent, il apparaît aussi des coefficients avec une régularité inférieure à $H^{s-\nu_k}$. Ces coefficients ont la propriété que pour un certain entier $Q > 0$

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow y}^{-1} \hat{c}(\xi) \log^{-Q}(|\xi| + 2) \in H^{s-\nu_k}.$$

Nous pensons que ce problème d'optimalité a un niveau de complexité analogue aux considérations sur la localisation des coefficients dans le §16 de [1].

2.c Le croisement des exposants. Dans le Théorème 2.1 nous avons fait l'hypothèse (voir (2.3)) qu'il n'y a pas de croisement des exposants, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de points y tels qu'il existe k, k' avec $k \neq k'$ et $\nu_k(y) = \nu_{k'}(y)$. Tous les auteurs cités ci-dessus exigent aussi cette hypothèse. Nous allons voir qu'un tel croisement des exposants induit en général l'explosion de coefficients dans le développement (2.4).

Pour notre problème du cylindre oblique, il est impossible d'éviter de tels croisements. Pour un point y_0 tel que $\omega(y_0) = \pi/2$ (il y en a toujours deux), nous avons $\nu_k(y_0) = \nu_{k'}(y_0)$ pour

$$\begin{aligned} k = (1, 0) \quad \text{et} \quad k' = (0, 1) & \quad \text{pour} \quad (\mathcal{P}_I) \\ k = (1, 0) \quad \text{et} \quad k' = (0, 2) & \quad \text{pour} \quad (\mathcal{P}_{II}). \end{aligned}$$

Les points où apparaît un croisement des exposants (pour s grand), sont denses dans M , ainsi ce phénomène se produit de façon générique.

Cependant, notre situation a un caractère particulier: il est possible de choisir les exposants comme des fonctions analytiques; ici ce choix $\nu_k(y)$ est évident, comme il est aussi évident pour les problèmes aux dérivées obliques. Il y a d'autres cas où un tel choix n'est pas évident, mais reste encore possible. Voilà un exemple.

Considérons un domaine $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ avec une arête et tel que

$$\Gamma = \{(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid z \in K(y)\}$$

où pour tout y , $K(y)$ est un cône. Notons $K(y) \cap S^{n-1}$ par $G(y)$. Supposons que la famille $(G(y))_y$ est analytique. Et nous considérons, par exemple, le

problème de Neumann pour Δ sur Γ . Alors les exposants seront

$$\nu_{(k_1, k_2)}(y) = 1 - \frac{n}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{n}{2}\right)^2 + \lambda_{k_1}(y) + k_2}$$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_{k_1}(y))_{k_1 \in \mathbb{N}}$ est la suite croissante des valeurs propres du problème de Neumann pour l'opérateur (positif) de Laplace-Beltrami sur $G(y)$. Comme conséquence d'un résultat de [3], il existe un choix analytique pour les valeurs propres, c'est-à-dire, des fonctions analytiques de y , $\tilde{\lambda}_{k_1}$ telles que pour tout y , la suite $(\tilde{\lambda}_{k_1}(y))_{k_1 \in \mathbb{N}}$ est une énumération des valeurs propres avec répétition selon la multiplicité. En général, cela ne coïncide pas avec l'énumération dans l'ordre croissant. Citons comme exemple le cas où les $G(y)$ sont des calottes sphériques d'ouverture $\alpha(y)$ où $0 < \alpha(y) < \pi$ (voir le §18 de [1]).

Nos résultats peuvent s'appliquer à une telle situation géométrique, avec le choix convenable des exposants.

2.d Motivations. Dans la Section 3, nous présenterons les résultats principaux de cet exposé. Voici nos motivations pour leur présentation:

1. Donner un développement asymptotique au voisinage des points de croisement qui soit aussi explicite et simple que possible.
2. Eliminer le plus possible d'hypothèses techniques.

Pour accomplir ces buts, nous avons choisi de traiter dans une première étape une classe de problèmes qui est restreinte par les deux exigences suivantes:

1. Analyticité pour les coefficients et les faces du domaine.
2. Pas de points de bifurcation (voir ci-dessous).

Cette classe de problèmes est assez large pour contenir les exemples décrits ci-dessus, en particulier les problèmes sur le cylindre oblique.

Comme nous l'avons déjà dit, pour les opérateurs d'ordre deux à coefficients réels, il existe des choix analytiques pour les exposants. En fait, c'est aussi vrai pour les opérateurs elliptiques d'ordre deux à coefficients complexes, parce que les pôles de la résolvante de la famille analytique d'opérateurs associée sont toujours simples (voir par exemple [1], §14). Mais un tel choix analytique est génériquement impossible pour des opérateurs d'ordre 4 comme le bilaplacien. Le problème fondamental est l'expression des racines d'un polynôme dont les

coefficients dépendent analytiquement d'un paramètre. Les racines sont des fonctions algébriques mais, en général, non analytiques du paramètre.

De telles situations de bifurcations sont étudiées dans [12]. Ce serait intéressant de donner la structure des développements asymptotiques pour les problèmes aux limites elliptiques généraux. Dans le cas général, il apparaît des combinaisons à la fois de croisements et de bifurcations. Nous pensons que même dans ce cas il sera possible d'atteindre les buts que nous avons décrits à la fin de la première section, c'est-à-dire, séparer tout ce qui peut être séparé.

3. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE AUX POINTS DE CROISEMENT

3.a Arrangement des exposants. Soit y_0 un point de croisement, c'est-à-dire un point où il existe $k \neq k'$ tels que

$$\nu_k(y_0) = \nu_{k'}(y_0) < s. \quad (3.1)$$

Comme nous supposons que notre cylindre est vraiment oblique, les points de croisement sont isolés, et il existe des intervalles ouverts I et \tilde{I} avec $y_0 \in I$, $\bar{I} \subset \tilde{I}$, et tels qu'il n'y ait pas d'autres points de croisement dans \tilde{I} .

Si l'angle d'ouverture le long de l'arête est constant (comme il arrive pour la base de notre cylindre ou comme ce serait dans le cas d'une fissure plane circulaire), alors si la condition (3.1) est satisfaite, elle est vérifiée le long de toute l'arête. Dans ce cas nous avons une superposition et pas de croisement, et on a le développement asymptotique simple du Théorème 2.1.

Soit \mathcal{K}_{y_0} l'ensemble des indices,

$$\mathcal{K}_{y_0} := \{k = (k_1, k_2) \mid \nu_k(y_0) < s\}.$$

Nous notons μ_1, \dots, μ_{j_0} les éléments distincts de l'ensemble

$$\{\nu_k(y_0) \mid k \in \mathcal{K}_{y_0}\}.$$

Comme y_0 est un point de croisement, le cardinal de \mathcal{K}_{y_0} est strictement plus grand que j_0 . Pour tout j , soit $\mathcal{K}_{y_0,j}$ le sous-ensemble de \mathcal{K}_{y_0} ,

$$\mathcal{K}_{y_0,j} := \{k \in \mathcal{K}_{y_0} \mid \nu_k(y_0) = \mu_j\}.$$

Les μ_j sont soit des exposants de croisement (si $\#\mathcal{K}_{y_0,j} > 1$) soit des exposants simples (si $\#\mathcal{K}_{y_0,j} = 1$).

Pour tout k , nous appelons multiplicité de ν_k la puissance maximale de $\log r$ qui apparaît dans le développement asymptotique (2.4) avec le terme

$r^{\nu_k(y)}$ pour $y \in I \setminus \{y_0\}$. Alors nous notons $(k_j^q)_{1 \leq q \leq q_j}$ une énumération de $\mathcal{K}_{y_0, j}$, en répétant chaque terme selon sa multiplicité.

Finalement, nous posons pour $y \in \tilde{I}$:

$$\mu_j(y) := \max_{k \in \mathcal{K}_{y_0, j}} \nu_k(y). \quad (3.2)$$

3.b Formulation directe du développement asymptotique. Ce qui change essentiellement par rapport au développement asymptotique simple (2.4), est le comportement des fonctions de r . Au lieu d'avoir séparément les termes $r^{\nu_l(y)} \log^p r$, nous avons maintenant des combinaisons spéciales de ces termes qui ne peuvent pas être séparées. Introduisons ces combinaisons.

Définition 3.1 Soit $q \geq 1$ un entier et ν_1, \dots, ν_q des nombres complexes pas nécessairement distincts. Soit γ un contour entourant ν_1, \dots, ν_q dans le plan complexe. Alors nous définissons

$$S[\nu_1, \dots, \nu_q; r] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{r^{\lambda}}{(\lambda - \nu_1) \cdots (\lambda - \nu_q)} d\lambda.$$

Voici quelques exemples. Nous supposons que ν_1 est différent de ν_2 .

$$S[\nu_1; r] = r^{\nu_1} \quad (3.3)$$

$$S[\nu_1, \nu_1; r] = r^{\nu_1} \log r \quad (3.4)$$

$$S[\nu_1, \nu_2; r] = \frac{r^{\nu_1} - r^{\nu_2}}{\nu_1 - \nu_2} \quad (3.5)$$

$$S[\nu_1, \nu_1, \nu_2; r] = \frac{r^{\nu_1} \log r}{\nu_1 - \nu_2} - \frac{r^{\nu_1} - r^{\nu_2}}{(\nu_1 - \nu_2)^2} \quad (3.6)$$

Si tous les ν_l sont distincts, nous obtenons

$$S[\nu_1, \dots, \nu_q; r] = \sum_{l=1}^q \frac{r^{\nu_l}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^q (\nu_l - \nu_k)}. \quad (3.7)$$

Remarque 3.2 L'exemple (3.5) donne (3.4) comme cas limite quand $\nu_2 \rightarrow \nu_1$. Plus généralement, la fonction S est analytique en tous ses arguments sur $\mathcal{C}^q \times (0, \infty)$. Au contraire, l'exemple (3.7) montre que les coefficients des puissances r^{ν_l} explosent près des points où deux des ν_l coïncident.

Théorème 3.3 Soit J, \tilde{J}, I et \tilde{I} comme dans la Section 3.a et dans le Théorème 2.1. Soit aussi \mathcal{U}_J et χ comme dans le Théorème 2.1. Nous supposons toujours que pour un $\varepsilon_0 \geq 0$ la condition (2.2) est vérifiée. Pour tout $j = 1, \dots, j_0$ et pour tout $q = 1, \dots, q_j$, il existe un ensemble fini d'indices γ et des fonctions analytiques $\psi_{j,q,\gamma}(y, \theta)$ tels que toute solution u du problème (\mathcal{P}_I) ou (\mathcal{P}_{II}) puisse être décomposée en

$$u = u_{\text{reg}} + u_{\text{sing}}.$$

Ici $u_{\text{reg}} \in H^{s+1-\varepsilon}(\mathcal{U}_J) \forall \varepsilon > \varepsilon_0$ et

$$u_{\text{sing}} = \sum_{j=1}^{j_0} v_j$$

avec

$$v_j = \chi^{-1} \left(\sum_{q,\gamma} (\Phi * d_{j,q,\gamma})(y, r) S[\nu_{k_j^1}(y), \dots, \nu_{k_j^q}(y); r] \psi_{j,q,\gamma}(y, \theta) \right). \quad (3.8)$$

Les coefficients $d_{j,q,\gamma}(y)$ sont définis sur \tilde{I} et vérifient $d_{j,q,\gamma} \in H^{s-\mu_j(y)-\varepsilon}(I)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarque 3.4 S'il n'y a pas de croisement dans \tilde{I} , alors cet énoncé donne le même résultat que le Théorème 2.1. En effet, les ensembles $\mathcal{K}_{y_0,j}$ sont tous réduits à un seul élément et les fonctions de r sont toutes de la forme $S[\nu, \dots, \nu; r]$, i. e. $r^\nu \log^q r$.

Remarque 3.5 Génériquement, les coefficients $d_{j,k,\gamma}$ ne s'annulent pas en y_0 (voir l'exemple dans la Sous-section 3.d ci-dessous). En conséquence, si $\mathcal{K}_{y_0,j}$ a plus d'un élément, les coefficients $c_{k,q,\beta}$ pour $k \in \mathcal{K}_{y_0,j}$ tendent vers l'infini en y_0 , en général.

3.c Formulation du développement asymptotique par des fibrés.

Comme dans la Sous-section 3.a, nous notons I un voisinage du point de croisement y_0 . Pour tous $y \in I \setminus \{y_0\}$ et $k \in \mathcal{K}_{y_0}$, soit $B_k(y)$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions de (r, θ) qui apparaissent dans le développement asymptotique simple (2.4) dans les termes correspondants aux exposants $\nu_k(y)$:

$$B_k(y) := \text{span} \left\{ r^{\nu_k(y)} \log^q r \varphi_{k,q,\beta}(y, \theta) \right\}.$$

Les $y \mapsto B_k(y)$ définissent des fibrés analytiques sur $I \setminus \{y_0\}$. Les théorèmes suivants donnent une autre description de ce qui se passe aux points de croisement.

Théorème 3.6 *La somme*

$$y \mapsto \bigoplus_{k \in \mathcal{K}_{y_0}} B_k(y)$$

qui est définie sur $I \setminus \{y_0\}$, admet une extension comme fibré analytique sur I .

Il est possible de considérer des sommes plus petites, dont chacune correspond à un seul exposant de croisement μ_j : on définit C_j par

$$C_j(y) := \bigoplus_{k \in \mathcal{K}_{y_0, j}} B_k(y).$$

Théorème 3.7 *Pour tout $j = 1, \dots, j_0$, le fibré $y \mapsto C_j(y)$ admet une extension comme fibré analytique sur I .*

Remarque 3.8 C'est un problème ouvert de savoir si les fibrés B_k eux-mêmes s'étendent comme des fibrés analytiques sur I . Nous avons résolu ce problème dans un cas particulier: soient B_{k_1} et B_{k_2} des fibrés de dimension un sur $I \setminus \{y_0\}$, donnés par

$$B_{k_l}(y) = \text{span} \left\{ r^{\nu_{k_l}(y)} \varphi_{k_l}(y, \theta) \right\} \quad (l = 1, 2).$$

Si leur somme s'étend comme fibré analytique sur I , alors B_{k_1} et B_{k_2} sont analytiques sur I .

Même si nous savions que les fibrés B_k s'étendent comme fibrés analytiques sur I , les énoncés des Théorèmes 3.6 et 3.7 ne seraient pas triviaux: la somme de deux fibrés analytiques n'est pas toujours un fibré analytique. Il peut arriver que la dimension s'effondre. Par exemple, si $B_1(y)$ est engendré par $r^{\nu_1(y)} \varphi(\theta)$ et $B_2(y)$ par $r^{\nu_2(y)} \varphi(\theta)$, et si $\nu_1(y) = \nu_2(y)$ seulement en $y = y_0$, alors la dimension de $B_1 + B_2$ se réduit de 2 à 1 en y_0 . Mais une somme de fibrés analytiques peut toujours être étendue comme fibré analytique. Dans notre exemple, $B_1(y_0) + B_2(y_0)$ doit être remplacé par $\text{span} \left\{ r^{\nu_1(y)} \varphi(\theta), r^{\nu_1(y)} \log r \varphi(\theta) \right\}$. Une trivialisations de cette extension est donnée par

$$\left\{ r^{\nu_1(y)} \varphi(\theta), \frac{r^{\nu_1(y)} - r^{\nu_2(y)}}{\nu_1(y) - \nu_2(y)} \varphi(\theta) \right\}.$$

Cette propriété d'extension n'est pas vraie, en général, pour des fibrés C^∞ . Donnons un exemple simple de fibrés à valeurs dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} B(y) &= \text{span} \{(1, 0, 0)\} \\ B'(y) &= \text{span} \left\{ \left(1, e^{-1/y^2} \cos \frac{1}{y}, e^{-1/y^2} \sin \frac{1}{y} \right) \right\}. \end{aligned}$$

La somme $B(y) + B'(y)$ ne peut pas être étendue comme fibré C^∞ en $y = 0$.

Nous partons maintenant de l'extension analytique $\tilde{C}_j(y)$ de C_j . Soit $y \mapsto X_{j,\alpha}(y, \cdot, \cdot)$ pour $\alpha = 1, \dots, A_j$ une trivialisations de \tilde{C}_j .

Comme conséquence de la forme des B_k , nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 3.9 *Il existe des fonctions analytiques $\psi_{q,\gamma}^{j,\alpha}(y, \theta)$ telles que*

$$X_{j,\alpha}(y, r, \theta) = \sum_{q,\gamma} S[\nu_{k_j^1}(y), \dots, \nu_{k_j^q}(y); r] \psi_{q,\gamma}^{j,\alpha}(y, \theta).$$

Tous les objets introduits dans cette sous-section jusqu'ici sont seulement liés au cadre géométrique (domaine et problème aux limites). Les parties singulières v_j apparaissant dans le Théorème 3.3 peuvent être écrites maintenant comme une sorte de sections $H^{s-\varepsilon}$ régularisées des fibrés \tilde{C}_j :

$$v_j = \chi^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^{A_j} (\Phi * b_{j,\alpha})(y, r) X_{j,\alpha}(y, r, \theta) \right)$$

avec $b_{j,\alpha}(y) \in H^{s-\mu_j(y)-\varepsilon}(I)$.

3.d Un exemple. Illustrons nos énoncés par un exemple simple. Nous considérons le problème mêlé (\mathcal{P}_I). Nous prenons $s \in (1, 2/(1 + \alpha))$, où α est la pente du haut du cylindre oblique (voir la Section 2.b). Comme il y a une condition de Dirichlet nulle, $\nu_{(0,0)}$ n'apparaît pas. Avec ce choix de s , seuls $\nu_{(1,0)}$ et $\nu_{(0,1)}$ interviennent. Pour simplifier, notons

$$\begin{aligned} \nu_1(y) &:= \nu_{(1,0)}(y) = \frac{\pi}{2\omega(y)} \\ \nu_2(y) &:= \nu_{(0,1)}(y) = 1. \end{aligned}$$

Il y a précisément deux points $y \in M$ où $\nu_1(y) = \nu_2(y)$. Ce sont les deux points y_0, y'_0 où $\omega(y) = \pi/2$. Sur $M \setminus \{y_0, y'_0\}$, on a le développement asymptotique simple (2.4). Pour chacune des valeurs de k concernées ici, $q = 0$ et une seule valeur de β est nécessaire. Nous écrivons l au lieu de $(l, 0, 1)$. Alors nous pouvons choisir

$$\begin{aligned} \varphi_1(y, \theta) &= \cos \nu_1(y) \theta \\ \varphi_2(y, \theta) &= \sin(\omega(y) - \theta). \end{aligned}$$

Ici il est possible de calculer $c_2(y)$ parce qu'il ne dépend que de la valeur ponctuelle sur l'arête de la donnée au bord h_2 :

$$c_2(y) = \frac{h_2(y, 0)}{\cos \omega(y)}.$$

Nous avons le résultat de régularité précis $c_2 \in H_{\text{loc}}^{s-1}(M \setminus \{y_0, y'_0\})$.

Concernant la représentation du développement asymptotique au moyen de fibrés, nous observons les faits suivants:

$$B_1(y) \text{ est engendré par } r^{\nu_1(y)} \cos \nu_1(y)\theta.$$

$$B_2(y) \text{ est engendré par } r \sin(\omega(y) - \theta).$$

$$\text{Si } y = y_0 \text{ ou } y'_0, \text{ alors } B_1(y) = B_2(y).$$

Une base pour l'extension analytique de $B_1 + B_2$ est donnée par

$$\begin{aligned} X_1(y, r, \theta) &= r^{\nu_1(y)} \cos \nu_1(y)\theta. \\ X_2(y, r, \theta) &= \frac{r \sin(\omega(y) - \theta) - r^{\nu_1(y)} \cos \nu_1(y)\theta}{1 - \nu_1(y)} \\ &= \frac{r - r^{\nu_1(y)}}{1 - \nu_1(y)} \sin(\omega(y) - \theta) \\ &\quad + r^{\nu_1(y)} \frac{\sin(\omega(y) - \theta) - \cos \nu_1(y)\theta}{1 - \nu_1(y)} \\ &= \frac{r - r^{\nu_1(y)}}{1 - \nu_1(y)} \cos \nu_1(y)\theta \\ &\quad + r \frac{\sin(\omega(y) - \theta) - \cos \nu_1(y)\theta}{1 - \nu_1(y)}. \end{aligned}$$

Les formes différentes de X_2 correspondent à des ordres différents d'énumération dans la représentation du Lemme 3.9.

Si nous voulons avoir la représentation directe du Théorème 3.3, nous avons besoin de 3 fonctions de base, par exemple:

$$\begin{aligned} S[\nu_1(y); r] \psi_{1,1}(y, \theta) &= X_1(y, r, \theta) \\ S[\nu_1(y); r] \psi_{1,2}(y, \theta) &= r^{\nu_1(y)} \frac{\sin(\omega(y) - \theta) - \cos \nu_1(y)\theta}{1 - \nu_1(y)} \\ S[\nu_1(y), \nu_2(y); r] \psi_{2,1}(y, \theta) &= \frac{r - r^{\nu_1(y)}}{1 - \nu_1(y)} \sin(\omega(y) - \theta). \end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons comparer les trois représentations d'une partie singulière, c'est-à-dire le "développement asymptotique simple" du Théorème 2.1, la "représentation directe" du Théorème 3.3, et la "représentation par fibrés" avec la base X_1, X_2 . Supposons que nous avons

$$\begin{aligned} c_1 r^{\nu_1} \varphi_1 + c_2 r^{\nu_2} \varphi_2 &= d_{1,1} S[\nu_1; r] \psi_{1,1} + d_{1,2} S[\nu_1; r] \psi_{1,2} + d_{2,1} S[\nu_1, \nu_2; r] \psi_{2,1} \\ &= b_1 X_1 + b_2 X_2. \end{aligned}$$

Alors nous avons les relations suivantes entre les coefficients.

$$\begin{aligned}b_1 &= c_1 + c_2 \\b_2 &= c_2(1 - \nu_1) \\c_1 &= b_1 - b_2/(1 - \nu_1) \\c_2 &= b_2/(1 - \nu_1) \\d_{1,1} &= b_1 \\d_{1,2} &= d_{2,1} = b_2.\end{aligned}$$

Ces relations montrent de façon claire l'explosion des coefficients dans le développement asymptotique simple en les points y_0, y'_0 et aussi la nécessité de l'introduction des exposants $\mu_j(y)$ dans (3.2).

RÉFÉRENCES

- [1] M. DAUGE. *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains — Smoothness and Asymptotics of Solutions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341. Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [2] P. GRISVARD. *Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains*. Pitman, London 1985.
- [3] T. KATO. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1976.
- [4] V. A. KONDRAT'EV. Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.* **16** (1967) 227–313.
- [5] V. A. KONDRAT'EV. Singularities of a solution of Dirichlet's problem for a second order elliptic equation in a neighborhood of an edge. *Differential Equations* **13** (1970) 1411–1415.
- [6] V. G. MAZ'YA, B. A. PLAMENEVSKII. L^p estimates of solutions of elliptic boundary value problems in a domain with edges. *Trans. Moscow Math. Soc.* **1** (1980) 49–97.
- [7] V. G. MAZ'YA, B. A. PLAMENEVSKII. On boundary value problems for a second order elliptic equation in a domain with edges. *Vestnik Leningrad Univ. Mathematics* **8** (1980) 99–106.
- [8] V. G. MAZ'YA, B. A. PLAMENEVSKII. Estimates in L^p and in Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **123** (1984) 1–56.
- [9] V. G. MAZ'YA, J. ROSSMANN. Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten. *Math. Nachr.* **138** (1988) 27–53.
- [10] A. NIKISHKIN. Singularities of the solution of the Dirichlet problem for a second order equation in a neighborhood of an edge. *Moscow Univ. Math. Bull.* **34**(2) (1979) 53–64.
- [11] S. REMPEL, B. W. SCHULZE. *Asymptotics for Elliptic Mixed Boundary Problems*. Akademie-Verlag, Berlin 1989.

- [12] R. SCHMUTZLER. About the structure of branching asymptotics for elliptic boundary value problems in domains with edges. Lecture given at the International Workshop “Analysis in Domains and on Manifolds with Singularities”, Breitenbrunn, GDR. 1990.