Espaces fonctionnels Maxwell:
Les gentils, les méchants et les singularités

M. COSTABEL & M. DAUGE*

dauge@univ-rennes1.fr

1. Equations de Maxwell.

Ce sont les équations de Maxwell harmonique en temps dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$(0) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - i\omega\,\mu \boldsymbol{H} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + i\omega\,\varepsilon \boldsymbol{E} = \boldsymbol{J} \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

pour une fréquence $\omega \neq 0$. Supposons la permittivité ε et la perméabilité μ constantes > 0 (milieu homogène et isotrope). Si on suppose $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ dans $L^2(\Omega)^3$ et $\boldsymbol{J} \in L^2(\Omega)^3$, alors

$$\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H} \in H(\operatorname{rot}).$$

Si on suppose de plus que $\operatorname{div} \boldsymbol{J} \in L^2(\Omega)$, prenant la divergence des équations (0) on obtient

$$\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H} \in H(\operatorname{div}).$$

Pour $\boldsymbol{E} \in H(\operatorname{rot})$, la trace tangentielle est définie comme élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$ par

$$\forall \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^3 : \quad \langle \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Pour $\boldsymbol{H} \in H(\operatorname{div})$, la trace normale est définie comme élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ par

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega) : \quad \langle \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}, \varphi \rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{H}\, \varphi + \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{grad} \varphi.$$

Ainsi les différentes conditions aux limites ont un sens

- Electrique pour un conducteur parfait : $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = 0$
- Magnétique pour un conducteur parfait : $\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} = 0$
- Impédance $n \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}) + \lambda \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} = 0$.

2. Les espaces naturels.

- $H(\operatorname{rot})$, $H_0(\operatorname{rot})$ (trace tangentielle nulle).
  $H(\operatorname{rot}, TL^2) = \big\{\boldsymbol{u} \in H(\operatorname{rot})\ ; \quad \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)^3\big\}$ (pour condition d'impédance).
  Pour formulations en rotationnel.

*IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex

- $H(\mathrm{div})$, $H_0(\mathrm{div})$ (trace normale nulle).
  $H(\mathrm{div}, TL^2) = \big\{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{div})\ ;\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)\big\}$.
- $X_N = H_0(\mathrm{rot}) \cap H(\mathrm{div})$ et $X_T = H(\mathrm{rot}) \cap H_0(\mathrm{div})$.
  Pour formulations "régularisées" avec conditions du conducteur parfait.
- $W_N = H(\mathrm{rot}, TL^2) \cap H(\mathrm{div})$ et $W_T = H(\mathrm{rot}) \cap H(\mathrm{div}, TL^2)$.
  Pour formulations "régularisées" avec conditions d'impédance.

3. Les espaces gentils.

Ce sont les espaces admettant un sous-espace dense de fonctions C^∞.

Théorème
On suppose Ω Lipschitz.

- $H(\mathrm{rot})$: $C^\infty(\overline{\Omega})^3$ *est dense* [11].
  $H_0(\mathrm{rot})$: $C_0^\infty(\Omega)^3$ *est dense* [11]
  $H(\mathrm{rot}, TL^2)$: $C^\infty(\overline{\Omega})^3$ *est dense* [2].
- $H(\mathrm{div})$: $C^\infty(\overline{\Omega})^3$ *est dense* [11].
  $H_0(\mathrm{div})$: $C_0^\infty(\Omega)^3$ *est dense* [11]
  $H(\mathrm{div}, TL^2)$: $C^\infty(\overline{\Omega})^3$ *est dense.*
- $H_0(\mathrm{rot}) \cap H_0(\mathrm{div}) = H_0^1(\Omega)^3$.
- $W_N = W_T$: $C^\infty(\overline{\Omega})^3$ *est dense* [5, 9].

4. Une clé des démonstrations: le retour aux gradients.

Pour $H(\mathrm{rot}, TL^2)$, $H(\mathrm{div}, TL^2)$, W_N et W_T on se ramène à faire la démonstration sur le sous-espace de leurs éléments qui sont des gradients. On peut supposer par localisation que Ω est simplement connexe. On se base sur le résultat dans [1]:

Lemme
Soit $\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div})$ tel que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$. Alors il existe $\boldsymbol{w} \in H^1(\Omega)^3$ tel que $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$.

Pour $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$, avec $\mathcal{V}$ égal à $H(\mathrm{rot}, TL^2)$, W_N ou W_T, on pose $\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$, qui est dans $H(\mathrm{div})$ et tel que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$. Donc il existe $\boldsymbol{w} \in H^1(\Omega)^3$ tel que $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{w} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$.

Comme $H^1(\Omega)^3$ est un sous-espace de $\mathcal{V}$ dans lequel $C^\infty(\overline{\Omega})^3$ est dense, on est ramené à traiter $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}$ qui est à rotationnel nul donc un gradient $\mathrm{grad}\,\varphi \in \mathcal{V}$. Le potentiel φ est dans un sous-espace de $H^1(\Omega)$.

Si $\mathcal{V} = H(\mathrm{div}, TL^2)$, pour $\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{div}, TL^2)$, on résout le problème de Neumann

$$\forall\psi \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \mathrm{grad}\,\psi = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{grad}\,\psi.$$

Alors $\operatorname{grad}\varphi - \boldsymbol{u}$ est à divergence nulle et à trace normale nulle, donc dans $H_0(\operatorname{div})$ dans lequel $C_0^\infty(\Omega)^3$ est dense. Là encore $\operatorname{grad}\varphi$ est dans $\mathcal{V}$.

Selon les cas:

- Si $\mathcal{V} = H(\operatorname{rot}, TL^2)$, $\varphi \in \widehat{V}_{\mathrm{Dir}}$ avec
$$\widehat{V}_{\mathrm{Dir}} = \big\{\psi \in H^1(\Omega)\ ; \quad \psi|_{\partial\Omega} \in H^1(\partial\Omega)\big\},$$
dans lequel $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense [2].
- Si $\mathcal{V} = H(\operatorname{div}, TL^2)$, $\varphi \in \widehat{W}_{\mathrm{Neu}}$ avec
$$\widehat{W}_{\mathrm{Neu}} = \big\{\psi \in H^1(\Omega)\ ; \quad \Delta\psi \in L^2(\Omega), \quad \partial_n\psi|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)\big\}.$$
- Si $\mathcal{V} = W_N$, $\varphi \in \widehat{W}_{\mathrm{Dir}}$ avec
$$\widehat{W}_{\mathrm{Dir}} = \big\{\psi \in H^1(\Omega)\ ; \quad \Delta\psi \in L^2(\Omega), \quad \psi|_{\partial\Omega} \in H^1(\partial\Omega)\big\}.$$
- Si $\mathcal{V} = W_T$, $\varphi \in \widehat{W}_{\mathrm{Neu}}$.

Les espaces $\widehat{W}_{\mathrm{Dir}}$ et $\widehat{W}_{\mathrm{Neu}}$ sont égaux à [12, 13]
$$\big\{\psi \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)\ ; \quad \Delta\psi \in L^2(\Omega)\big\}$$
dans lequel $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense [9].

5. Des espaces intermédiaires.

Soit $C_N^\infty = C^\infty(\overline{\Omega})^3 \cap X_N$ et $C_T^\infty = C^\infty(\overline{\Omega})^3 \cap X_T$. Alors on a [7, 4]

Théorème
Soit Ω un polyèdre lipschitzien.
L'adhérence de C_N^∞ dans X_N est l'espace $H_N = H^1(\Omega)^3 \cap X_N$.
L'adhérence de C_T^∞ dans X_T est l'espace $H_T = H^1(\Omega)^3 \cap X_T$.

Ce résultat se démontre en plusieurs étapes.

(i) Pour $\boldsymbol{u} \in C_N^\infty$ ou C_T^∞, la norme $\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\|_{L^2} + \|\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|_{L^2}$ est équivalente à la norme H^1 (double intégration par parties) [6]: avec $u_n = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{u}_\top = \boldsymbol{u} - u_n\boldsymbol{n}$
$$\int_\Omega |\operatorname{grad}\boldsymbol{u}|^2 \;=\; \int_\Omega \big(|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}|^2 + |\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^2\big) + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\operatorname{grad}_\top(u_n)\cdot\boldsymbol{u}_\top - \operatorname{div}_\top\boldsymbol{u}_\top\,(u_n)}_{=0}.$$

Donc l'adhérence de C_N^∞ dans X_N est contenue dans l'espace H_N, et de même pour H_T.

(ii) Soit Σ l'ensemble des coins et arêtes de Ω. Soit $C_\Sigma^\infty(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $C^\infty(\overline{\Omega})$ dont le support ne rencontre pas Σ. Pour tout $u \in H^1(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\chi \in C_\Sigma^\infty(\overline{\Omega})$

tel que $\|u-\chi u\|_{H^1} < \varepsilon$. Se montre par simple troncature pour les coins, et par combinaison de troncature et d'aplatissement par des fonctions du type r^α, $\alpha > 0$, pour les arêtes (r est la distance aux arêtes) [8].

(iii) Pour $\boldsymbol{u} \in H_N$, on applique le **(ii)** à chaque composante et on régularise $\chi\boldsymbol{u}$: pour un paramètre de régularisation assez petit, les fonctions régularisées $\boldsymbol{v}_n$ sont dans $C^\infty_\Sigma(\overline{\Omega})$.

(iv) Il reste à relever, face par face indépendamment, les traces tangentielles des $\boldsymbol{v}_n$, qui sont petites puisque $\boldsymbol{v}_N \to \chi\boldsymbol{u}$ qui a des traces tangentielles nulles, et à soustraire ces relèvements.

6. Les espaces méchants.

Tout se joue encore sur les gradients: on remarque que $\operatorname{grad}\varphi \in X_N$ si et seulement si $\varphi \in D(\Delta^{\mathrm{Dir}})$ avec

$$D(\Delta^{\mathrm{Dir}}) = \big\{\varphi \in H^1_0(\Omega)\ ;\quad \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\big\}$$

et $\operatorname{grad}\varphi \in X_T$ si et seulement si $\varphi \in D(\Delta^{\mathrm{Neu}})$ avec

$$D(\Delta^{\mathrm{Neu}}) = \big\{\varphi \in H^1(\Omega)\ ;\quad \Delta\varphi \in L^2(\Omega),\quad \partial_n\varphi|_{\partial\Omega} = 0\big\}.$$

On a [3]:

Théorème
Soit Ω un polyèdre lipschitzien.

$$X_N = H_N + \operatorname{grad}\big(D(\Delta^{\mathrm{Dir}})\big) \quad \textit{et} \quad X_T = H_T + \operatorname{grad}\big(D(\Delta^{\mathrm{Neu}})\big).$$

Si Ω est convexe, $D(\Delta^{\mathrm{Dir}})$ et $D(\Delta^{\mathrm{Neu}})$ sont contenus dans $H^2(\Omega)$. Donc $X_N = H_N$ et $X_T = H_T$.

Par contre, si Ω est un polyèdre non convexe, il existe des espaces non triviaux K_{Dir} et K_{Neu} tels que

$$\big(H^2 \cap H^1_0(\Omega)\big) \oplus K_{\mathrm{Dir}} = D(\Delta^{\mathrm{Dir}}) \quad \text{et} \quad \big\{\psi \in H^2\ ;\ \partial_n\psi|_{\partial\Omega} = 0\big\} \oplus K_{\mathrm{Neu}} = D(\Delta^{\mathrm{Neu}}).$$

On a alors

Théorème
Soit Ω un polyèdre lipschitzien non convexe.

$$X_N = H_N \oplus \operatorname{grad}\big(K_{\mathrm{Dir}}\big) \quad \textit{et} \quad X_T = H_T \oplus \operatorname{grad}\big(K_{\mathrm{Neu}}\big). \tag{1}$$

Les espaces K_{Dir} et K_{Neu} sont de dimension infinie. On peut en donner la description suivante, *cf* [10]. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des coins de Ω et $\mathcal{C}_{\mathrm{Dir}}$, resp. $\mathcal{C}_{\mathrm{Neu}}$, le sous ensemble de $\mathcal{C}$ des coins tels que le premier exposant de singularité Dirichlet, resp. Neumann, soit $< \frac{1}{2}$. Soit $\mathcal{E}_0$ le sous ensemble des arêtes $\boldsymbol{e}$ non convexes de Ω. Alors

Théorème
Les applications suivantes sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathrm{Dir}} & \longrightarrow & \prod_{c\in\mathcal{C}_{\mathrm{Dir}}} \mathbb{R} \times \prod_{e\in\mathcal{E}_0} V_{-1}^{1-\pi/\omega_e}(\boldsymbol{e}) \\ \psi & \longmapsto & (\gamma_c, \quad \gamma_e), \end{array}$$

où γ_c et γ_e sont les coefficients de singularités de ψ associés à sa décomposition avec partie régulière dans $H^2(\Omega)$. Le résultat pour K_{Neu} est similaire ($\mathcal{C}_{\mathrm{Dir}}$ est remplacé par $\mathcal{C}_{\mathrm{Neu}}$).

L'espace $V_{-1}^s(\boldsymbol{e})$ est un espace à poids intermédiaire entre $V_{-1}^0(\boldsymbol{e})$ qui l'espace des fonctions γ telles que $d_{\boldsymbol{e}}^{-1}\gamma \in L^2(\boldsymbol{e})$, avec $d_{\boldsymbol{e}}$ la distance aux extrémités de $\boldsymbol{e}$, et

$$V_{-1}^1(\boldsymbol{e}) = \{\gamma \mid \quad d_{\boldsymbol{e}}^{-1}\gamma,\ \gamma' \in L^2(\boldsymbol{e})\}.$$

Les décompositions (1) ne sont pas orthogonales dans $H(\mathrm{rot})\cap H(\mathrm{div})$. Les éléments $\boldsymbol{u} \in H_N^\perp$ se caractérisent par

(2) $$\boldsymbol{u} \in X_N, \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_N, \quad \int_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\ \ \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0.$$

Ils sont donc les solutions d'un problème de Maxwell (équations aux dérivées partielles) totalement homogène. Cet espace $H_N^\perp$ admet une paramétrisation canonique par l'espace K_{Dir}^* des fonctions singulières duales de Δ^{Dir} :

$$K_{\mathrm{Dir}}^* = \{\varphi \in L^2(\Omega)\ ; \quad \forall\psi \in H^2\cap H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \varphi\,\Delta\psi = 0\}.$$

Théorème
Soit Ω un polyèdre lipschitzien non convexe. Alors l'application

(3) $$\begin{array}{ccc} H_N^\perp & \longrightarrow & K_{\mathrm{Dir}}^* \\ \boldsymbol{u} & \longmapsto & \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}, \end{array}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

Prenant dans (2) les fonctions test $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\psi$ avec ψ parcourant $H^2\cap H_0^1(\Omega)$, on obtient que l'application est bien définie.

Si $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$, combinant la formulation (2) avec la décomposition (1), on obtient que $\boldsymbol{u}$ satisfait

$$\forall \boldsymbol{v} \in X_N, \quad \int_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\ \ \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0.$$

Donc $\boldsymbol{u} = 0$ et l'application (3) est injective.

Pour montrer qu'elle est surjective, introduisons, basé sur la décomposition (1) l'opérateur borné S

$$\begin{array}{cccc} S: & X_N & \longrightarrow & K_{\mathrm{Dir}} \\ & \boldsymbol{u} & \longmapsto & S\boldsymbol{u}, \quad \text{tel que} \quad \boldsymbol{u} - \mathrm{grad}\,S\boldsymbol{u} \in H_N. \end{array}$$

Soit $q \in K^*_{\mathrm{Dir}}$. Soit $\boldsymbol{u}$ la solution du problème

$$(4) \qquad \boldsymbol{u} \in X_N, \quad \forall \boldsymbol{v} \in X_N, \quad \int_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + \operatorname{div} \boldsymbol{u} \ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \int_\Omega q \ \Delta(S\boldsymbol{v}).$$

Comme $S|_{H_N} = 0$, $\boldsymbol{u}$ satisfait (2) donc est dans $H_N^\perp$.
Si maintenant on prend dans (4) les fonctions test $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \psi$ avec $\psi \in H^2 \cap H^1_0(\Omega)$ on a

$$\forall \psi \in H^2 \cap H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u} \ \Delta \psi = 0.$$

Pour les fonctions test $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \psi$ avec ψ parcourant K_{Dir}, on a $S(\operatorname{grad} \psi) = \psi$, donc

$$\forall \psi \in D(\Delta^{\mathrm{Dir}}), \qquad \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{u} - q) \ \Delta \psi = 0.$$

Donc $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = q$.

REFERENCES

[1] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE, V. GIRAULT. Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains. *Math. Meth. Appl. Sci.* **21** (1998) 823–864.

[2] F. BEN BELGACEM, C. BERNARDI, M. COSTABEL, M. DAUGE. Un résultat de densité pour les équations de Maxwell. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324**(6) (1997) 731–736.

[3] M. BIRMAN, M. SOLOMYAK. L^2 -theory of the Maxwell operator in arbitrary domains. *Russ. Math. Surv.* **42 (6)** (1987) 75–96.

[4] A. BONNET-BENDHIA, C. HAZARD, S. LOHRENGEL. A singular field method for the solution of Maxwell's equations in polyhedral domains. Rapport de Recherche 299, ENSTA 1997. To appear in SIAM J. Appl. Math.

[5] P. CIARLET, C. HAZARD, S. LOHRENGEL. Les équations de Maxwell dans un polyèdre : un résultat de densité. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* (1998). A paraître.

[6] M. COSTABEL. A coercive bilinear form for Maxwell's equations. *J. Math. Anal. Appl.* **157 (2)** (1991) 527–541.

[7] M. COSTABEL, M. DAUGE. Maxwell and Lamé eigenvalues on polyhedra. Preprint 98-08, Université de Rennes 1 (1998). To appear in *Math. Meth. Appl. Sci.*

[8] M. COSTABEL, M. DAUGE, S. NICAISE. Singularities of Maxwell interface problems. Preprint 98-24, Université de Rennes 1 (1998). To appear in *Modél. Math. Anal. Numér.*

[9] M. COSTABEL, M. DAUGE. Un résultat de densité pour les équations de Maxwell régularisées dans un domaine lipschitzien. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* (1998). A paraître.

[10] M. DAUGE. *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains – Smoothness and Asymptotics of Solutions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341. Springer-Verlag, Berlin 1988.

[11] V. GIRAULT, P. RAVIART. *Finite Element Methods for the Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms*. Springer series in Computational Mathematics, 5. Springer-Verlag, Berlin 1986.

[12] D. S. JERISON, C. E. KENIG. Boundary value problems on Lipschitz domains. In *Studies in partial differential equations*, volume 23 of *MAA Stud. Math.*, pages 1–68. Math. Assoc. America, Washington, D.C. 1982.

[13] D. S. JERISON, C. E. KENIG. The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.* **130**(1) (1995) 161–219.