Développement asymptotique le long d'une arête pour des équations elliptiques d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^3$

Martin Costabel et Monique Dauge

Résumé. Pour les solutions des problèmes de Dirichlet-Neumann mêlés pour les opérateurs elliptiques à coefficients analytiques réels dans des domaines analytiques par morceaux, nous donnons un développement asymptotique explicite le long des arêtes. Nous décrivons en particulier les singularités au voisinage des points de croisement des exposants de singularité (voir Théorème 3). Ainsi nous pouvons nous passer des hypothèses techniques de [2].

Edge asymptotics for second order elliptic equations in piecewise analytic domains in $\mathbb{R}^3$.

Abstract. *For solutions of mixed Dirichlet-Neumann problems for second order elliptic operators with real analytic coefficients, we give an explicit asymptotic expansion near edges. We describe in particular singularities near crossing points of the singularity exponents (see Théorème 3). So we can remove the technical hypotheses of [2].*

Abridged English Version. Let Ω be a piecewise analytic domain in $\mathbb{R}^3$ with edges and no corners. We assume that the opening angle along each edge is everywhere different from π. Let L be a strongly elliptic second order partial differential operator with real analytic coefficients. As a particular boundary value problem, we consider the Dirichlet problem: $Lu = f$ in Ω and $u = 0$ on $\partial\Omega$. Let $u \in H^1(\Omega)$ be a weak solution with $f \in H^{s-1}(\Omega)$, s a given positive real number.

Locally near a point on an edge M, we introduce special cylindrical coordinates (y, r, θ) such that M corresponds to $r = 0$, Ω corresponds to $0 < \theta < \omega(y)$ and, in these coordinates, the conormal principal part of L coincides with the two-dimensional Laplacian in the plane $y =$const. The function ω is uniquely defined as an analytic function on M.

The singularity exponents $\nu_k(y)$ with $k \in \mathbb{N}^2$, are given by $\frac{k_1\pi}{\omega(y)} + k_2$. We consider a point y_0 where a crossing of exponents happens, i. e., where $k, k' \in \mathbb{N}^2$ exist with $\nu_k \not\equiv \nu_{k'}$ near y_0 but $\nu_k(y_0) = \nu_{k'}(y_0) < s$. We denote by $\mu_1, \dots, \mu_{j_0}$ the distinct elements of the set $\left\{\nu_k(y_0) \mid k \in \mathbb{N}^2; \nu_k(y_0) < s\right\}$ and define the functions $\mu_j(y) := \max\left\{\nu_k(y) \mid \nu_k(y_0) = \mu_j\right\}$. For $\nu_1, \dots, \nu_q \in \mathbb{C}$ we define

$$S[\nu_1, \dots, \nu_q; r] = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{r^\lambda}{(\lambda - \nu_1)\cdots(\lambda - \nu_q)}\, d\lambda.$$

where γ is a curve around $\nu_1, \dots, \nu_q$ in $\mathbb{C}$.

Theorem 1 *Given $s > 0$ and $\varepsilon_0 > 0$, choose a neighborhood of the point y_0 such that for all $k \in \mathbb{N}^2$ there holds $\nu_k(y) < s$ or $\nu_k(y) \geq s - \varepsilon_0$ in this neighborhood. Then the solution u can be decomposed as $u = u_{\rm reg} + u_{\rm sing}$ with $u_{\rm reg} \in H^{s+1-\varepsilon}$ $\forall \varepsilon > \varepsilon_0$ near y_0 and $u_{\rm sing} = \sum_{j=1}^{j_0} v_j$,*

$$v_j = \sum_{q,\gamma} (\Phi * d_{j,q,\gamma})(y, r)\, S[\nu_{k_j^1}(y), \dots, \nu_{k_j^q}(y); r]\, \psi_{j,q,\gamma}(y, \theta).$$

Here $(k_j^q)_{1\leq q\leq q_j}$ is an enumeration of $\left\{k \in \mathbb{N}^2 \mid \nu_k(y_0) = \mu_j\right\}$ with repetitions, $\psi_{j,q,\gamma}(y, \theta)$ are analytic functions not depending on f, the coefficients $d_{j,q,\gamma}(y)$ satisfy $d_{j,q,\gamma} \in H^{s-\mu_j(y)-\varepsilon}$ near y_0, and the convolution with Φ is the usual regularisation procedure.

For each s, there is at most a finite number of points where crossing of exponents occurs. Ouside of the crossing points, the above representation of the singular part of u reduces to the form

$$u_{\text{sing}} = \sum_{k,q,\beta} (\Phi * c_{k,q,\beta})(y,r)\, r^{\nu_k(y)} \log^q r\, \varphi_{k,q,\beta}(y,\theta).$$

Here the coefficients $c_{k,q,\beta}(y)$ satisfy $c_{k,q,\beta} \in H^{s-\nu_k(y)-\varepsilon}$, but at crossing points, they will blow up, in general.

---

1. Définition des domaines et des problèmes aux limites. Soit Ω un domaine analytique par morceaux dans $\mathbb{R}^3$. Nous supposons que Ω a des arêtes mais pas de coins. Plus précisément, pour tout point x sur le bord de Ω, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x et un difféomorphisme analytique de $\mathcal{U}$ sur un voisinage $\mathcal{W}$ de l'origine tel que x est envoyé en 0 et $\mathcal{U}\cap\overline{\Omega}$ est envoyé sur $\mathcal{W}\cap\overline{D}$, où D est un dièdre. Pour D on peut toujours prendre l'un des dièdres modèles:

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\} \quad & (x \text{ est un point régulier du bord}),\\ \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0,\ x_3 > 0\} \quad & (x \text{ est sur une arête convexe}),\\ \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0 \text{ ou } x_2 < 0\} \quad & (x \text{ est sur une arête non convexe}). \end{aligned}$$

La partie régulière du bord $\partial\Omega$ se décompose en les composantes connexes $\partial^j\Omega$.

Soit

$$L = \sum_{i,k=1}^{3} \partial_i a_{ik} \partial_k + \sum_{k=1}^{3} a_k \partial_k + a_0$$

un opérateur fortement elliptique à coefficients réels analytiques. Nous considérons les problèmes aux limites mêlés de Dirichlet-Neumann:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{dans } \Omega: \quad Lu = f, \\ \text{sur chaque } \partial^j\Omega: \quad \text{soit } u = g_j, \quad \text{soit } \displaystyle\sum_{i,k=1}^{3} \nu_i a_{ik} \partial_k u = h_j. \end{cases}$$

Nous supposons la régularité suivante pour les données, avec $s > \frac{1}{2}$ réel:

$$f \in H^{s-1}(\Omega), \quad g_j \in H^{s+\frac{1}{2}}(\partial^j\Omega), \quad h_j \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial^j\Omega).$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de $(\mathcal{P})$. Alors nous verrons que u peut être décomposée en deux parties pour tout $\varepsilon > 0$, $u = u_{\text{reg}} + u_{\text{sing}}$, où $u_{\text{reg}} \in H^{s+1-\varepsilon}(\Omega)$ et u_{sing} est un développement asymptotique que nous décrirons.

Soit M l'une des arêtes et $x_0 \in M$. Il existe un segment ouvert J dans M avec $x_0 \in J$, un voisinage $\mathcal{U}_J$ de J dans $\overline{\Omega}$ et un difféomorphisme analytique χ qui définit sur $\mathcal{U}_J$ des coordonnées cylindriques locales (y, r, θ) avec $0 < \theta < \omega(y)$ telles que l'opérateur L s'écrit dans les nouvelles variables:

$$\chi \circ L \circ \chi^{-1} = \Delta_z + \sum_{|\alpha|\le 1} \sum_{k=0}^{2} b_{\alpha k} \partial_z^\alpha \partial_y^k.$$

Ici, Δ_z est le Laplacien dans les coordonnées cartésiennes z associées aux coordonnées polaires (r, θ). La fonction ω définit une fonction analytique sur l'arête M ("angle d'ouverture normalisée") qui ne dépend pas du difféomorphisme χ mais seulement de la géométrie de Ω et de la partie principale conormale de l'opérateur L.

Les exposants des singularités qui apparaissent dans le développement asymptotique le long de l'arête dépendent du paramètre d'arête y. Ce sont les mêmes que pour un problème en dimension deux pour le Laplacien avec des termes d'ordre inférieur sur un secteur d'ouverture $\omega(y)$. Nous pouvons les énumérer grâce à un double indice $k = (k_1, k_2)$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Pour $k_1 \ge 1$, leur expression $\nu_k(y)$ est différente selon que les conditions au bord des deux côtés de M sont de même nature ou non. Dans le premier cas, on a $\nu_k(y) = \frac{k_1\pi}{\omega(y)} + k_2$ et dans le second cas, on a $\nu_k(y) = (2k_1-1)\frac{\pi}{2\omega(y)} + k_2$. De plus, nous posons $\nu_{(0,k_2)}(y) = k_2$. Ces exposants doivent contenir tous les entiers positifs à cause de la possibilité d'interaction entre polynômes et singularités.

2. Développement asymptotique dans un cas simple. Ce à quoi on peut s'attendre comme développement asymptotique le long de l'arête est

$$\sum_{k,q,\beta} c_{k,q,\beta}(y)\, r^{\nu_k(y)} \log^q r\, \varphi_{k,q,\beta}(y,\theta) \tag{1}$$

où seuls les $c_{k,q,\beta}$ dépendent des données (f, h_j). En fait, un tel développement asymptotique sous forme de produit tensoriel ne convient pas en général, parce que les fonctions $c_{k,q,\beta}$ ne sont pas assez régulières. Pour régulariser les coefficients, nous introduisons une fonction $\Phi(y,r)$ telle que sa transformée de Fourier partielle vérifie $\mathcal{F}_{y\to\xi}\Phi(\xi,r) = \phi(r|\xi|)$ où ϕ est une fonction à décroissance rapide, a une transformée de Fourier à support compact et vérifie pour N assez grand $\phi(0) = 1, \quad d^l\phi(0) = 0 \quad (l = 1,\dots,N)$. $(\Phi * c)$ désignera la convolution par rapport à y.

Théorème 1 *Soit J et $\mathcal{U}_J$ et χ comme ci-dessus. Soit $\tilde{J}$ un ouvert dans M tel qu'on ait $\overline{J} \subset \tilde{J}$. En coordonnées locales, nous écrivons I et $\tilde{I}$ pour J et $\tilde{J}$. Nous supposons qu'il existe $\varepsilon_0 \geq 0$ tel que*

$$\forall k, \quad (\forall y \in \tilde{I},\, \nu_k(y) < s) \quad \text{ou} \quad (\forall y \in \tilde{I},\, \nu_k(y) \geq s - \varepsilon_0) \tag{2}$$

$$\text{si } \nu_k(y) = \nu_{k'}(y) < s \quad \text{pour un } y \in \tilde{I}\,, \text{ alors } \nu_k = \nu_{k'} \text{ sur } \tilde{I}. \tag{3}$$

Pour tout k il existe un ensemble fini d'indices (q,β) et des fonctions analytiques $\varphi_{k,q,\beta}(y,\theta)$ tels que toute solution u du problème $(\mathcal{P})$ puisse être décomposée en $u = u_{\text{reg}} + u_{\text{sing}}$. Ici $u_{\text{reg}} \in H^{s+1-\varepsilon}(\mathcal{U}_J)$ $\forall \varepsilon > \varepsilon_0$ et

$$u_{\text{sing}} = \chi^{-1}\left(\sum_{k,q,\beta} (\Phi * c_{k,q,\beta})(y,r)\, r^{\nu_k(y)} \log^q r\, \varphi_{k,q,\beta}(y,\theta)\right). \tag{4}$$

Les coefficients $c_{k,q,\beta}(y)$ sont définis sur $\tilde{I}$ et vérifient $c_{k,q,\beta} \in H^{s-\nu_k(y)-\varepsilon}(I)$ pour tout $\varepsilon > 0$. La somme est étendue aux k pour lesquels $\nu_k < s$ sur $\tilde{I}$.

Des résultats proches de ceux du Théorème 1 ont été démontrés par Kondrat'ev [1], Nikishkin [3], Maz'ya et Roßmann [2]. Contrairement aux auteurs ci-dessus nos résultats n'exigent pas l'hypothèse d'isomorphisme dans des espaces de Sobolev à poids; cette hypothèse exclut le problème de Neumann, par exemple. La deuxième différence se trouve dans notre localisation. Tous les auteurs ci-dessus font l'hypothèse suivante:

$$\forall M,\, \forall k,\, \forall y \in M, \quad \nu_k(y) \neq s. \tag{5}$$

Au cas où cette hypothèse est vérifiée, nous pouvons prendre $\varepsilon_0 = 0$ dans notre théorème. Il est intéressant de réaliser qu'une telle hypothèse implique une restriction sévère sur la variation de l'angle d'ouverture ω le long de M.

3. Développement asymptotique aux points de croisement. Dans le Théorème 1 nous avons fait l'hypothèse (voir (3)) qu'il n'y a pas de croisement des exposants. Tous les auteurs cités ci-dessus exigent aussi cette hypothèse. Nous allons voir qu'un tel croisement des exposants induit en général l'explosion de coefficients dans le développement (4). Soit y_0 un point de croisement, c'est-à-dire un point où il existe $k \neq k'$ tels que $\nu_k \not\equiv \nu_{k'}$ et

$$\nu_k(y_0) = \nu_{k'}(y_0) < s. \tag{6}$$

Les points de croisement sont isolés, parce que les ν_k sont analytiques. Nous choisissons les intervalles ouverts I et $\tilde{I}$ avec $y_0 \in I$, $\overline{I} \subset \tilde{I}$, tels qu'il n'y ait pas d'autres points de croisement dans $\tilde{\tilde{I}}$. Nous notons $\mu_1, \ldots, \mu_{j_0}$ les éléments distincts de l'ensemble $\left\{\nu_k(y_0) \mid k \in \mathbb{N}^2; \nu_k(y_0) < s\right\}$.

Pour tout k, nous appelons multiplicité de k la puissance maximale de $\log r$ qui apparaît dans le développement asymptotique (4) avec le terme $r^{\nu_k(y)}$ pour $y \in I \setminus \{y_0\}$. Alors nous notons $(k_j^q)_{1\leq q\leq q_j}$ une énumération de $\left\{k \in \mathbb{N}^2 \mid \nu_k(y_0) = \mu_j\right\}$, en répétant chaque terme selon sa multiplicité.

Finalement, nous posons pour $y \in \tilde{I}$:

$$\mu_j(y) := \max\left\{\nu_k(y) \mid \nu_k(y_0) = \mu_j\right\}. \tag{7}$$

Ce qui change essentiellement par rapport au développement asymptotique simple (4), est le comportement des fonctions de r. Au lieu d'avoir séparément les termes $r^{\nu_l(y)} \log^p r$, nous avons maintenant des combinaisons spéciales de ces termes qui ne peuvent pas être séparées. Introduisons ces combinaisons.

Définition 2 Soit $q \geq 1$ un entier et $\nu_1, \ldots, \nu_q$ des nombres complexes pas nécessairement distincts. Soit γ un contour entourant $\nu_1, \ldots, \nu_q$ dans le plan complexe. Alors nous définissons

$$S[\nu_1, \ldots, \nu_q; r] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{r^\lambda}{(\lambda - \nu_1)\cdots(\lambda - \nu_q)}\, d\lambda.$$

Voici quelques exemples. Nous supposons que ν_1 est différent de ν_2.

$$\begin{array}{rclcrcl} S[\nu_1; r] & = & r^{\nu_1} & , & S[\nu_1, \nu_1; r] & = & r^{\nu_1} \log r\,, \\ S[\nu_1, \nu_2; r] & = & \frac{r^{\nu_1} - r^{\nu_2}}{\nu_1 - \nu_2} & , & S[\nu_1, \nu_1, \nu_2; r] & = & \frac{r^{\nu_1} \log r}{\nu_1 - \nu_2} - \frac{r^{\nu_1} - r^{\nu_2}}{(\nu_1 - \nu_2)^2}. \end{array}$$

La fonction S est analytique en tous ses arguments sur $\mathbb{C}^q \times (0, \infty)$. Au contraire, les deux derniers exemples montrent que les coefficients des puissances r^{ν_l} explosent près des points où deux des ν_l coïncident.

Théorème 3 *Soit J, $\tilde{J}$, I, $\tilde{I}$, $\mathcal{U}_J$ et χ comme ci-dessus. Nous supposons toujours que pour un $\varepsilon_0 \geq 0$ la condition (2) est vérifiée. Pour tout $j = 1, \ldots, j_0$ et pour tout $q = 1, \ldots, q_j$, il existe un ensemble fini d'indices γ et des fonctions analytiques $\psi_{j,q,\gamma}(y, \theta)$ tels que toute solution u du problème $(\mathcal{P})$ puisse être décomposée en $u = u_{\mathrm{reg}} + u_{\mathrm{sing}}$. Ici $u_{\mathrm{reg}} \in H^{s+1-\varepsilon}(\mathcal{U}_J)$ $\forall \varepsilon > \varepsilon_0$ et $u_{\mathrm{sing}} = \sum_{j=1}^{j_0} v_j$ avec*

$$v_j = \chi^{-1}\left(\sum_{q,\gamma} (\Phi * d_{j,q,\gamma})(y, r)\, S[\nu_{k_j^1}(y), \ldots, \nu_{k_j^q}(y); r]\, \psi_{j,q,\gamma}(y, \theta)\right). \tag{8}$$

Les coefficients $d_{j,q,\gamma}(y)$ sont définis sur $\tilde{I}$ et vérifient $d_{j,q,\gamma} \in H^{s-\mu_j(y)-\varepsilon}(I)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Génériquement, les coefficients $d_{j,k,\gamma}$ ne s'annulent pas en y_0 (voir Section 4). En conséquence, si $\mathcal{K}_{y_0,j}$ a plus d'un élément, les coefficients $c_{k,q,\beta}$ pour $k \in \mathcal{K}_{y_0,j}$ tendent vers l'infini en y_0, en général.

Pour tous $y \in I \setminus \{y_0\}$ et $k \in \mathcal{K}_{y_0}$, soit $B_k(y)$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions de (r, θ) qui apparaissent dans le développement asymptotique simple (4) dans les termes correspondants aux exposants $\nu_k(y)$:

$$B_k(y) := \mathrm{span}\left\{r^{\nu_k(y)} \log^q r\, \varphi_{k,q,\beta}(y, \theta)\right\}.$$

Les $y \mapsto B_k(y)$ définissent des fibrés analytiques sur $I \setminus \{y_0\}$. Les théorèmes suivants donnent une autre description de ce qui se passe aux points de croisement.

Théorème 4 *La somme*

$$y \mapsto \bigoplus_{k \in \mathcal{K}_{y_0}} B_k(y)$$

qui est définie sur $I \setminus \{y_0\}$, admet une extension comme fibré analytique sur I.

Il est possible de considérer des sommes plus petites, dont chacune correspond à un seul exposant de croisement μ_j: on définit C_j par

$$C_j(y) := \bigoplus_{k\in\mathcal{K}_{y_0,j}} B_k(y).$$

Théorème 5 *Pour tout $j = 1,\dots,j_0$, le fibré $y \mapsto C_j(y)$ admet une extension comme fibré analytique sur I.*

Nous partons maintenant de l'extension analytique $\tilde{C}_j(y)$ de C_j. Soit $y \mapsto X_{j,\alpha}(y,\cdot,\cdot)$ pour $\alpha = 1,\dots,A_j$ une trivialisation de $\tilde{C}_j$.

Comme conséquence de la forme des B_k, nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 6 *Il existe des fonctions analytiques $\psi^{j,\alpha}_{q,\gamma}(y,\theta)$ telles que*

$$X_{j,\alpha}(y,r,\theta) = \sum_{q,\gamma} S[\nu_{k_j^1}(y),\dots,\nu_{k_j^q}(y); r]\, \psi^{j,\alpha}_{q,\gamma}(y,\theta).$$

Les parties singulières v_j apparaissant dans le Théorème 3 peuvent être écrites maintenant comme une sorte de sections $H^{s-\varepsilon}$ régularisées des fibrés $\tilde{C}_j$:

$$v_j = \chi^{-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{A_j} (\Phi * b_{j,\alpha})(y,r)\, X_{j,\alpha}(y,r,\theta)\right)$$

avec $b_{j,\alpha}(y) \in H^{s-\mu_j(y)-\varepsilon}(I)$.

4. Exemple du cylindre oblique. Illustrons nos énoncés par un exemple simple. Nous considérons le problème mêlé de Dirichlet-Neumann dans un cylindre oblique. Soit B un domaine analytique borné dans $\mathbb{R}^2$. Soit Ψ une fonction affine $(x_2,x_3) \mapsto x_1 = \Psi(x_2,x_3)$. Nous supposons que $\forall (x_2,x_3) \in \overline{B},\quad \Psi(x_2,x_3) > 0$. Nous introduisons

$$\Omega = \Big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_2,x_3) \in B,\ 0 < x_1 < \Psi(x_2,x_3)\Big\}\ .$$

C'est notre cylindre oblique. Nous notons M l'arête supérieure et $\partial_1\Omega$ le côté vertical du cylindre:

$$\partial_1\Omega = \Big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_2,x_3) \in \partial B,\ 0 < x_1 < \Psi(x_2,x_3)\Big\}\ .$$

L'union du haut et du bas du cylindre est notée $\partial_2\Omega$. Notre problème aux limites est $\Delta u = f$ dans Ω , $u = 0$ sur $\partial_1\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial n} = h_2$ sur $\partial_2\Omega$. Nous prenons $s \in (1, 2/(1+\alpha))$, où α est la “pente” du haut du cylindre oblique. L'angle d'ouverture maximale est $(1+\alpha)\pi/2$ et l'angle d'ouverture minimale est $(1-\alpha)\pi/2$. L'hypothèse (5) est déjà violée si $\alpha \geq \sqrt{5}-2 \simeq 0.236$.

Comme il y a une condition de Dirichlet nulle, $\nu_{(0,0)}$ n'apparaît pas. Avec ce choix de s, seuls $\nu_{(1,0)}$ et $\nu_{(0,1)}$ interviennent. Pour simplifier, notons

$$\nu_1(y) \ :=\ \nu_{(1,0)}(y) \ =\ \pi/2\omega(y)\,, \quad \nu_2(y) \ :=\ \nu_{(0,1)}(y) \ =\ 1.$$

Il y a précisément deux points $y \in M$ où $\nu_1(y) = \nu_2(y)$. Ce sont les deux points y_0, y_0' où $\omega(y) = \pi/2$. Sur $M \setminus \{y_0, y_0'\}$, on a le développement asymptotique simple (4). Pour chacune des valeurs de k concernées ici, $q = 0$ et une seule valeur de β est nécessaire. Nous écrivons l au lieu de $(l,0,1)$. Alors nous pouvons choisir

$$\varphi_1(y,\theta) \ =\ \cos\nu_1(y)\theta\,, \quad \varphi_2(y,\theta) \ =\ \sin(\omega(y)-\theta).$$

Ici il est possible de calculer $c_2(y)$ parce qu'il ne dépend que de la valeur ponctuelle sur l'arête de la donnée au bord h_2 :

$$c_2(y) = h_2(y,0)/\cos\omega(y).$$

Nous avons le résultat de régularité précis $c_2 \in H^{s-1}_{\mathrm{loc}}(M \setminus \{y_0, y_0'\})$.

Concernant les fibrés B_k, nous voyons que $B_1(y)$ est engendré par $r^{\nu_1(y)}\cos\nu_1(y)\theta$, $B_2(y)$ par $r\sin(\omega(y)-\theta)$ et que si $y=y_0$ ou y_0', alors $B_1(y)=B_2(y)$. Une base pour l'extension analytique de B_1+B_2 est donnée par

$$
\begin{aligned}
X_1(y,r,\theta) &= r^{\nu_1(y)}\cos\nu_1(y)\theta.\\
X_2(y,r,\theta) &= \frac{r\ \sin(\omega(y)-\theta)-r^{\nu_1(y)}\cos\nu_1(y)\theta}{1-\nu_1(y)}\\
&= \frac{r-r^{\nu_1(y)}}{1-\nu_1(y)}\ \sin(\omega(y)-\theta)+\ r^{\nu_1(y)}\,\frac{\sin(\omega(y)-\theta)-\cos\nu_1(y)\theta}{1-\nu_1(y)}\\
&= \frac{r-r^{\nu_1(y)}}{1-\nu_1(y)}\ \cos\nu_1(y)\theta+\ r\,\frac{\sin(\omega(y)-\theta)-\cos\nu_1(y)\theta}{1-\nu_1(y)}.
\end{aligned}
$$

Les formes différentes de X_2 correspondent à des ordres différents d'énumération dans la représentation du Lemme 6.

Si nous voulons avoir la représentation directe du Théorème 3, nous avons besoin de 3 fonctions de base, par exemple:

$$
\begin{aligned}
S[\nu_1(y);r]\,\psi_{1,1}(y,\theta) &= X_1(y,r,\theta)\\
S[\nu_1(y);r]\,\psi_{1,2}(y,\theta) &= r^{\nu_1(y)}\,\frac{\sin(\omega(y)-\theta)-\cos\nu_1(y)\theta}{1-\nu_1(y)}\\
S[\nu_1(y),\nu_2(y);r]\,\psi_{2,1}(y,\theta) &= \frac{r-r^{\nu_1(y)}}{1-\nu_1(y)}\ \sin(\omega(y)-\theta).
\end{aligned}
$$

Maintenant nous pouvons comparer les trois représentations d'une partie singulière, c'est-à-dire le “développement asymptotique simple” du Théorème 1, la “représentation directe” du Théorème 3, et la “représentation par fibrés” avec la base X_1, X_2. Supposons que nous avons

$$
\begin{aligned}
c_1\,r^{\nu_1}\varphi_1+c_2\,r^{\nu_2}\varphi_2 &= d_{1,1}\,S[\nu_1;r]\,\psi_{1,1}+d_{1,2}\,S[\nu_1;r]\,\psi_{1,2}+d_{2,1}\,S[\nu_1,\nu_2;r]\,\psi_{2,1}\\
&= b_1\,X_1+b_2\,X_2.
\end{aligned}
$$

Alors nous avons les relations suivantes entre les coefficients.

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
b_1 &=& c_1+c_2 & ,\,c_1 &=& b_1-b_2/(1-\nu_1)\,, & d_{1,1} &=& b_1\\
b_2 &=& c_2(1-\nu_1)\,, & c_2 &=& b_2/(1-\nu_1) & ,\,d_{1,2} &=& d_{2,1}\ =\ b_2.
\end{array}
$$

Ces relations montrent de façon claire l'explosion des coefficients dans le développement asymptotique simple en les points y_0, y_0' et aussi la nécessité de l'introduction des exposants $\mu_j(y)$ dans (7).

Références bibliographiques

[1] V. A. Kondrat'ev. Singularities of a solution of Dirichlet's problem for a second order elliptic equation in a neighborhood of an edge. *Differential Equations* 13 (1970) 1411–1415.

[2] V. G. Maz'ya, J. Rossmann. Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten. *Math. Nachr.* 138 (1988) 27–53.

[3] A. Nikishkin. Singularities of the solution of the Dirichlet problem for a second order equation in a neighborhood of an edge. *Moscow Univ. Math. Bull.* 34(2) (1979) 53–64.

Adresses:
Martin Costabel:
Institut für Angewandte Mathematik, Im Neuenheimer Feld 293, D-6900 Heidelberg
Monique Dauge:
Département de Mathématiques et Informatique, 2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03.