

# Analyse spectrale et singularités d'un problème de transmission non coercif

Anne-Sophie BONNET-BENDHIA, Monique DAUGE et Karim RAMDANI

ENSTA/UMA , CNRS URA 853, 32 Bd. Victor, 75739- Paris Cedex 15, France  
IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042-Rennes, France  
E-mail:bonnet@ensta.fr, dauge@univ-rennes1.fr, ramdani@ensta.fr

---

**Résumé.** Cette Note est consacrée à l'analyse spectrale d'un opérateur non borné associé à un problème de transmission bidimensionnel non coercif. Nous montrons par une méthode d'équations intégrales que si l'interface est régulière, cet opérateur est autoadjoint à résolvante compacte. Si l'interface présente un coin, une étude des singularités par transformée de Mellin permet d'obtenir une condition nécessaire et suffisante, portant sur le contraste entre les deux milieux, pour que l'opérateur soit autoadjoint. S'il ne l'est pas, nous donnons une caractérisation de ses extensions autoadjointes.

*Spectral analysis and singularities of a noncoercive transmission problem*

**Abstract.** *This Note is devoted to the spectral analysis of an unbounded operator associated with a non coercive transmission problem. Using an integral equation method, we show that, if the interface is regular, this operator is selfadjoint and has compact resolvent. If the interface has a corner, the study of the singularities using Mellin transform allows us to derive a necessary and sufficient condition on the contrast between the two media for selfadjointness. If the operator is not selfadjoint, a characterization of its selfadjoint extensions is given.*

---

## 1 Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\Sigma$  régulière, contenant un ouvert connexe  $\Omega_-$  de frontière  $\Gamma$  lipschitzienne vérifiant  $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$ . On note  $\Omega_+$  l'ouvert  $\Omega \setminus \overline{\Omega_-}$  et  $n$  la normale à  $\Gamma$  extérieure à  $\Omega_-$ .

On s'intéresse dans cette Note à l'étude spectrale de l'opérateur  $A$  non borné de  $L^2(\Omega)$  défini par:

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega), \operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) \in L^2(\Omega)\} \\ Au = -\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u), \quad \forall u \in D(A) \end{cases}$$

où  $\varepsilon(x) = \varepsilon_{\pm}$  dans  $\Omega_{\pm}$ , avec  $\varepsilon_+ > 0$  et  $\varepsilon_- < 0$ .

Ce problème est issu de l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques en présence de matériaux supraconducteurs, le modèle de London (cf.[3]) conduisant en effet à des permittivités diélectriques négatives.

L'opérateur  $A$  étant symétrique, il sera autoadjoint s'il est surjectif. Dans le cas où  $\varepsilon$  garde un signe constant, la surjectivité de  $A$  découle immédiatement du lemme de Lax-Milgram. Son analyse spectrale est dans ce cas tout à fait usuelle :  $A$  étant un opérateur autoadjoint à résolvante

compacte (puisque l'ouvert  $\Omega$  est borné), son spectre est purement ponctuel et constitué d'une suite de valeurs propres tendant vers  $+\infty$ , les vecteurs propres associés formant une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ .

Lorsque  $\varepsilon$  change de signe, l'opérateur  $A$  n'est plus coercif, et son analyse spectrale est plus délicate. Nous montrons par une méthode d'équations intégrales que si l'interface  $\Gamma$  est régulière et si le contraste  $\mu = \varepsilon_+/\varepsilon_-$  est différent de  $-1$ , alors l'opérateur  $A$  demeure autoadjoint à résolvante compacte. Son spectre est alors constitué de deux suites de valeurs propres (positives et négatives) tendant vers  $+\infty$  et  $-\infty$ . Nous montrons que ce résultat reste vrai si l'interface  $\Gamma$  présente un coin, à condition que  $\mu = \varepsilon_+/\varepsilon_-$  n'appartienne pas à un certain intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}_-$  contenant  $-1$ . En revanche, si  $\mu \in I$ , l'opérateur n'est plus autoadjoint. L'étude de ses singularités au voisinage du coin (par transformée de Mellin) nous permet d'en donner toutes les extensions autoadjointes.

## 2 Interface régulière

Supposons l'interface  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On vérifie aisément que montrer la surjectivité de  $A$  revient à établir l'existence de  $(u_-, u_+) \in H^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_+)$ , solution pour  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$  du problème de transmission:

$$(P) \begin{cases} \Delta u_- = 0 & (\Omega_-) \\ \Delta u_+ = 0 & (\Omega_+) \\ u_- - u_+ = 0 & (\Gamma) \\ \varepsilon_- \partial_n u_- - \varepsilon_+ \partial_n u_+ = g & (\Gamma) \\ u_+ = 0 & (\Sigma). \end{cases}$$

Suivant [1], nous utilisons une méthode d'équations intégrales pour étudier l'existence d'une solution de (P). Soit  $G(x, y)$  la fonction de Green du Laplacien dans  $\Omega$  à trace nulle sur  $\Sigma$ . En utilisant une représentation intégrale de  $u$  de la forme  $u(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)q(y)d\gamma_y$ , on voit que la résolution de (P) est équivalente à la résolution dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  de l'équation intégrale:

$$\varepsilon_- \left(-\frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{K}\right) q - \varepsilon_+ \left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{K}\right) q = g \quad (1)$$

où  $\mathcal{K}$  est l'opérateur intégral défini par la relation  $\mathcal{K}q(x) = \int_{\Gamma} \partial_{n_x} G(x, y)q(y)d\gamma_y$  pour  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $x \in \Gamma$ . Comme  $\mu = \varepsilon_+/\varepsilon_-$  est différent de 1, on peut écrire l'équation intégrale (1) sous la forme équivalente:

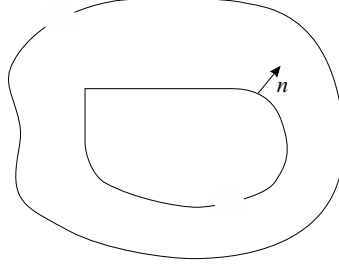
$$\left(\mathcal{K} - \frac{\rho}{2} \text{Id}\right) q = \frac{g}{\varepsilon_- - \varepsilon_+}, \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}. \quad (2)$$

On sait (cf. [1]) que si la frontière  $\Gamma$  est régulière, l'opérateur  $\mathcal{K}$  est compact de  $H^{-1/2}(\Gamma)$  dans lui-même. L'équation intégrale (2) est donc une équation de Fredholm de seconde espèce, à condition que  $\varepsilon_+ + \varepsilon_- \neq 0$ , i.e.  $\mu \neq -1$ . Il en découle que si  $\mu \in \mathbb{R}_- \setminus \{-1\}$  est tel que  $\rho/2$  n'est pas valeur propre de  $\mathcal{K}$ , alors l'opérateur  $A$  est autoadjoint. Dans le cas contraire, on peut montrer que  $A$  a un noyau de dimension finie, et que sa restriction à l'orthogonal de ce noyau est bijective. Ceci permet là encore de conclure au caractère autoadjoint de  $A$ , et d'énoncer le:

**THÉORÈME 1.** *Si l'interface  $\Gamma$  est régulière et si  $\mu = \varepsilon_+/\varepsilon_- \in \mathbb{R}_- \setminus \{-1\}$ , l'opérateur  $A$  est autoadjoint à résolvante compacte. Son spectre est constitué de deux suites de valeurs propres (positives et négatives) réelles tendant vers  $+\infty$  et  $-\infty$ .*

## 3 Interface à coins

Intéressons nous maintenant au cas où l'ouvert  $\Omega_-$  n'est plus régulier, mais présente -pour simplifier- un seul coin  $O$  d'angle intérieur  $\omega = \pi/2$  (voir figure ci-dessous). On supposera désormais  $\mu \neq -1$ .



L'opérateur  $A$  étant symétrique, on a  $D(A) \subset D(A^*)$ . On se propose d'étudier l'inclusion inverse en examinant la régularité des éléments de  $D(A)$  et de  $D(A^*)$ . On déduit du paragraphe précédent un résultat de régularité locale en tout point régulier de  $\Gamma$  (régularité  $H^2$  de part et d'autre de l'interface), puis l'on étudie la régularité au voisinage du coin par transformée de Mellin (cf. [2]). De manière classique, les exposants de singularité sont les pôles du symbole Mellin associé à l'opérateur  $A$ . On peut montrer que ces pôles sont les solutions complexes  $\lambda$  de l'équation:

$$(\mu + 1) \sin \lambda \pi = \pm(1 - \mu) \sin \lambda(\pi - \omega). \quad (3)$$

Suivant les valeurs de  $\mu$ , cette équation admet dans la bande  $\text{Re } \lambda \in ] - 1, 1[$  pour  $\omega = \pi/2$  et  $\rho$  défini en (2) (outre la racine double  $\lambda = 0$ ):

- i)* Soit 2 solutions réelles opposées si  $\mu < -3$  ou  $\mu > -1/3$ :  $\lambda = \pm\xi$ , avec  $\xi = \frac{2}{\pi} \arccos(1/2|\rho|)$ .
- ii)* Soit 2 solutions imaginaires opposées si  $-3 < \mu < -1/3$ :  $\lambda = \pm i\eta$ , avec  $\eta = \frac{2}{\pi} \text{argch}(1/2|\rho|)$ .

On introduit les fonctions singulières correspondant à ces exposants de singularité ( $(r, \theta)$  désignant les coordonnées polaires associées à  $O$ ):

$$S(r, \theta) = \chi(r) r^\lambda \varphi(\theta) \quad \text{et} \quad S^*(r, \theta) = \chi(r) r^{-\lambda} \varphi(\theta)$$

où  $\chi$  est une fonction de troncature égale à 1 au voisinage de 0,  $\lambda \neq 0$  est la solution de (3) vérifiant  $\text{Re } \lambda \in [0, 1[$  et  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , et  $\varphi$  est la solution  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$-\frac{d}{d\theta} \left( \varepsilon(\theta) \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = \lambda^2 \varepsilon(\theta) \varphi(\theta).$$

Notons que  $S$  et  $S^*$  sont toujours dans  $L^2(\Omega)$  et que, de plus, dans le cas *i)*,  $S$  appartient à  $H^1(\Omega)$  mais que  $S^*$  n'y appartient pas, alors que dans le cas *ii)*, ni  $S$  ni  $S^*$  n'appartiennent à  $H^1(\Omega)$ . Dans le cas où  $\mu$  a l'une des valeurs critiques  $(-1/3)$ , resp.  $(-3)$ , les singularités  $S$  et  $S^*$  sont de la forme  $\chi(r) \varphi(\theta)$  et  $\chi(r) \log r \varphi(\theta)$ , resp.  $\chi(r) (\varphi(\theta) + \frac{1}{2} \log^2 r)$  et  $\chi(r) (\log r \varphi(\theta) + \frac{1}{6} \log^3 r)$ . Nous laisserons de côté ces situations et supposons dorénavant que  $\mu \in ] - \infty, 0[ \setminus \{-3, -1, -1/3\}$ . On peut alors établir le:

**LEMME 2.**

*i)* Si  $\mu < -3$  ou si  $\mu > -1/3$ , alors:

$$\begin{cases} S(r, \theta) = \chi(r) r^\xi \varphi(\theta) \in D(A) \\ S^*(r, \theta) = \chi(r) r^{-\xi} \varphi(\theta) \notin D(A^*) \\ \forall v \in D(A^*), \quad v = v_R + \beta S. \end{cases}$$

ii) Si  $-3 < \mu < -1/3$ , alors:

$$\begin{cases} S(r, \theta) = \chi(r) r^{i\eta} \varphi(\theta) \in D(A^*) \setminus D(A) \\ S^*(r, \theta) = \chi(r) r^{-i\eta} \varphi(\theta) \in D(A^*) \setminus D(A) \\ \forall u \in D(A), u = u_R \\ \forall v \in D(A^*), v = v_R + \beta S + \beta^* S^* . \end{cases}$$

Ici les parties régulières  $u_R, v_R$  sont dans  $H_0^1(\Omega) \cap (H^2(\Omega_+) \times H^2(\Omega_-))$  et les coefficients  $\beta, \beta^*$  sont complexes.

En effet, la formule des résidus appliquée au symbole Mellin de  $A$  permet de montrer que tout  $v \in D(A^*)$  s'écrit sous la forme  $v = v_R + \beta S + \beta^* S^* + k \chi(r) \log r$ . On vérifie alors que:

- Dans le cas *i*), on a  $S \in D(A)$ . Pour montrer que  $S^* \notin D(A^*)$ , considérons une boule  $\mathcal{B}_\delta$  de rayon  $\delta$  centrée sur  $O$ . L'application de la formule de Green dans l'ouvert  $\Omega_\delta = \Omega / \overline{\mathcal{B}_\delta}$  permet de montrer que:

$$\int_{\Omega_\delta} \{ \operatorname{div}(\varepsilon \nabla S) S^* - S \operatorname{div}(\varepsilon \nabla S^*) \} dx = 2\xi \int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta) |\varphi(\theta)|^2 d\theta$$

A l'aide de l'alternative de Fredholm relative au problème de transmission dans des espaces à poids sur le domaine infini formé des deux secteurs d'ouverture  $\pi/2$  et  $3\pi/2$ , on peut établir que cette dernière intégrale est non nulle. Par suite,  $S^* \notin D(A^*)$  et donc  $\beta^* = 0$ . Un raisonnement analogue permet de montrer que  $\chi(r) \log r \notin D(A^*)$ , et donc que  $k = 0$ .

- Dans le cas *ii*), on a encore  $\chi(r) \log r \notin D(A^*)$ . Par suite, si  $(u, v) \in D(A) \times D(A^*)$ , on peut écrire que  $u = u_R + \alpha S + \alpha^* S^*$  et  $v = v_R + \beta S + \beta^* S^*$ . Mais comme  $S, S^* \notin D(A)$  (puisque aucune de ces fonctions singulières n'est dans  $H^1(\Omega)$ ), on a nécessairement  $\alpha = \alpha^* = 0$ . On peut alors établir que  $S, S^* \in D(A^*)$  puisque tout  $u \in D(A)$  est, dans ce cas, assez régulier au voisinage de  $O$  pour permettre une intégration par parties dans les intégrales  $\int_\Omega Au \cdot \overline{S}$  ou  $\int_\Omega Au \cdot \overline{S^*}$ .

On déduit du lemme 2 que  $D(A) = D(A^*)$  si et seulement si  $\mu < -3$  ou si  $\mu > -1/3$ , et par suite le:

### THÉORÈME 3.

i) L'opérateur  $A$  est autoadjoint si et seulement si  $\mu < -3$  ou  $\mu > -1/3$ .

ii) Si  $-3 < \mu < -1/3$ , toute extension autoadjointe de  $A$  s'obtient en rajoutant à son domaine  $D(A)$  une combinaison linéaire de  $S$  et de  $S^*$  à valeurs réelles, à savoir une fonction de la forme  $\alpha \operatorname{Re} S + \beta \operatorname{Im} S$ , avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

On peut généraliser ce résultat au cas d'un angle  $\omega$  quelconque, les valeurs critiques  $(-3)$  et  $(-1/3)$  devenant  $\mu_\omega$  et  $1/\mu_\omega$ , avec  $\mu_\omega = (\omega - 2\pi)/\omega$ .

## Références bibliographiques

- [1] Costabel M. and Stephan E., 1985. A direct boundary integral equation method for transmission problems, J. Math. Anal. Appl. , 106, 367-413.
- [2] Kondrat'ev V.A., 1967. Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trans. Moscow Math. Soc., 16, 227-313.
- [3] Ma J. and Wolff I., 1995. Modeling the microwave properties of superconductors, Trans. Microwave theory and tech., Vol. 43, NO. 5, 1053-1059.