# Conditions suffisantes pour l'injection compacte d'espaces de Sobolev à poids (ou autour d'une question de F. Mignot)

par Pierre Bolley, Monique Dauge, Bernard Helffer

## §1 Introduction

On s'intéresse dans cette note, motivée par une question de F. Mignot [Mi], à des conditions suffisantes d'injection compacte entre espaces de Sobolev.

On sait que l'injection de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ n'est pas compacte, mais notant :

$$L^2_\rho(\mathbb{R}^n) = \{u \text{ mesurable t. q. } \int |u(x)|^2 \rho(x)\, dx < \infty\}$$

$$H^1_\rho(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2_\rho, \partial_{x_j} u \in L^2_\rho, j = 1, \dots, n\}$$

la question :

($Q_1$) Existe-t-il des poids $\rho > 0$ tels que l'injection $H^1_\rho(\mathbb{R}^n) \subset L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ soit compacte ?

semble avoir été moins étudiée.

Posant $\rho = e^{2f}$ où f est une fonction $C^\infty$ réelle et notant :

$$H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) ; (\partial_{x_j} - \partial_{x_j} f)u \in L^2(\mathbb{R}^n) , j = 1, \dots, n\}$$

la question $Q_1$ devient :

($Q_2$) Sous quelle condition sur f a-t-on injection compacte de $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ ?

Le résultat annoncé dans [Mi] est le suivant :

**Théorème 1.1 :** *On suppose que*

**(1.1)** *il existe une constante* $0 < C < 2$ *et une constante* D *telles que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$D + C|\nabla f(x)|^2 + \Delta f(x) \geqslant 0$$

**(1.2)** $|\nabla f(x)|$ *tend vers l'infini lorsque* $|x|$ *tend vers l'infini*

*Alors l'injection de* $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *est compacte.*

**N. B.** Ici et dans toute la suite $\Delta$ désigne le laplacien ordinaire "négatif" $\sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j}$

$\nabla f$ désigne le gradient de f et $|\nabla f|^2$ désigne $\sum_{j=1}^n |\partial_{x_j} f|^2$.

Il se trouve que ce problème est voisin du problème des bouteilles magnétiques introduit par Avron-Herbst-Simon [Av-He-Si] et développé par Helffer-Mohamed [He-Mo]. Désignant par $A = (A_1, \dots, A_n)$ un potentiel magnétique où $A_j(x)$ est une fonction $C^\infty$ réelle et notant :

$$H^{1,iA}(\mathbb{R}^n) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \; ; \; (\partial_{x_j} - iA_j)u \in L^2(\mathbb{R}^n) \; , \; j = 1, \dots, n\}$$

la question était la suivante :

$(Q_3)$ Sous quelle condition sur A l'injection de $H^1_A(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est-elle compacte ?

Notant B le champ magnétique :

$$B(x) = (b_{j,k})_{1 \leqslant j,k \leqslant n} = (\partial_{x_j} A_k(x) - \partial_{x_k} A_j(x))_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$$

et $|B(x)|$ désignant la norme $\sum_{j,k=1}^n |b_{j,k}(x)|$, le résultat donné dans [Av-He-Si] est le suivant :

**Théorème 1.2 :** *On suppose que*

**(1.3)** *il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j,k=1}^n \sum_{|\alpha|=1} |\partial_x^\alpha b_{j,k}(x)| \leqslant C(1 + |B(x)|)$$

**(1.4)** $|B(x)|$ *tend vers l'infini lorsque* $|x|$ *tend vers l'infini*

*Alors l'injection de* $H^{1,iA}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *est compacte.*

Ce résultat a été largement étendu dans [He-Mo] dont on rapellera et utilisera les méthodes dans le §3.

On l'a compris, la différence entre $Q_2$ et $Q_3$ est le passage d'un potentiel réel à un potentiel imaginaire pur, ce qui change radicalement certaines propriétés.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à deux extensions du théorème 1.1. La première extension, faite dans le §2, n'utilise, comme le théorème 1.1, que des propriétés de croissance à l'infini des dérivées de f d'ordre au plus 2 et essaie de donner un résultat optimal dans ce cadre. La deuxième extension, faite dans le §3 utilise au contraire des propriétés de croissance à l'infini des dérivées de f d'ordre $\geqslant 2$ dans l'esprit de l'extension du théorème 1.2 faite dans [He-Mo]. Dans toutes ces démonstrations, on verra l'ombre des techniques utilisées par J.Kohn [Ko] pour démontrer des propriétés d'hypoellipticité de l'opérateur de Hörmander $\sum X_j^2$ par des méthodes de crochets.

## §2 Conditions d'ordre 2

On montre d'abord que l'espace $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans un espace à poids $L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ par l'estimation a priori donnée dans le théorème 2.2 valable en dimension $n \geq 1$ et basée sur l'identité suivante :

**Lemme 2.1 :** *Pour tout* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *à valeurs réelles et tout* $j = 1, \dots, n$, *on a :*

$$(2.1) \qquad \int (2(\partial_{x_j} f)^2 + \partial^2_{x_j} f)\, u^2\, dx = -2\int \partial_{x_j} f \,.\, u \,.\, (\partial_{x_j} - \partial_{x_j} f) u\, dx.$$

**Preuve :** il suffit évidemment de faire la démonstration en une seule variable $x \in \mathbb{R}$.

On donne d'abord une première démonstration basée sur une technique de crochets. Notant :

$$X \equiv \partial_x - \partial_x f$$

et $X^*$ l'opérateur adjoint de $X$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on a pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles :

$$\|(X+X^*)u\|^2 = \|Xu\|^2 + 2 < Xu\,,\, X^*u > + \|X^*u\|^2$$

où $\| \ \|$ (resp. $< \,,\, >$) est la norme (resp. le produit scalaire) de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Or :

$$\|Xu\|^2 = \|X^*u\|^2 + < [X, X^*]u\,,\, u >$$

$$X + X^* = -2\, \partial f/\partial x$$

$$[X, X^*] = -2\, \partial^2 f/\partial x^2.$$

Donc :

$$4\|\partial_x f \,.\, u\|^2 = -4 < Xu, \partial_x f \,.\, u > -2 < \partial_x^2 f \,.\, u, u >.$$

D'où l'identité (2.1).

On peut aussi donner une deuxième démonstration basée sur une technique de Hardy. Pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles, en notant $v \equiv u e^{-f}$ et en choisissant $R$ tel que $u(x) = 0$ pour $|x| \geq R$, on a :

$$\begin{aligned} \|\partial_x f \,.\, u\|^2 &= \int_{-R}^{R} (\partial_x f(x))^2\, e^{2f(x)} \left(\int_{-R}^{x} v(t)\, \partial_t v(t)\, dt\right) dx \\ &= \int_{-R}^{R} v(t)\, \partial_t v(t) \left(\int_t^R (\partial_x f(x))^2\, e^{2f(x)}\, dx\right) dt\ ; \end{aligned}$$

et par intégration par parties dans la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} &= \int_{-R}^{R} v(t)\, \partial_t v(t) \left\{\partial_x f(R)\, e^{2f(R)} - \partial_x f(t)\, e^{2f(t)} - \int_t^R (\partial_x^2 f(x)\, e^{2f(x)}\, dx\right\} dt \\ &= -\int_{-R}^{R} \partial_x f \,.\, v\, e^f\, \partial_x v \,.\, e^f\, dx - \tfrac{1}{2}\int_{-R}^{R} \partial_x^2 f(x)\, e^{2f(x)}\, v^2(x)\, dx. \end{aligned}$$

D'où l'identité (2.1). ■

**Théorème 2.2 :** *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $C_\varepsilon > 0$ *telle que pour tout* $u \in H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$, *on ait :*

$$(2.2) \qquad \int \left((2-\varepsilon)|\nabla f|^2 + \Delta f\right) |u|^2 \, dx \leqslant C_\varepsilon \sum_{j=1}^n \int |(\partial_{x_j} - \partial_{x_j} f) u|^2 \, dx.$$

**Preuve :** cette estimation (2.2) se déduit de l'identité (2.1) en notant que f est à valeur réelles et que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$. ■

De l'estimation (2.2), il résulte facilement que :

**Corollaire 2.3 :** *On suppose que :*

(2.3) *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $(2-\varepsilon)|\nabla f(x)|^2 + \Delta f(x)$ *tende vers l'infini quand* $|x| \to +\infty$.

*Alors l'injection de* $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *est compacte.*

**Remarques :**

Des conditions de ce type, en particulier la condition (1.1), apparaissent dans des problèmes voisins en théorie des probabilités (cf les travaux de Kusuoka, Holley et Strook [Ku-Ho-St]).

Il s'agit bien d'une amélioration du théorème 1.1 de [Mi] puisque les hypothèses (1.1) et (1.2) impliquent l'hypothèse (2.3) pour $\varepsilon \in ]0, 2-C[$. Cette amélioration est bien réelle comme on peut le voir en considérant la fonction $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ dans $\mathbb{R}^2$ pour laquelle on observe que $|\nabla f(x)|^2 = 4\, x_1^2 x_2^2 . |x|^2$ et que $\Delta f = 2\,|x|^2$. Ainsi, l'hypothèse (1.2) n'est pas satisfaite alors que l'hypothèse (2.3) est vérifiée.

Remarquons d'autre part :

si $\Delta f \geqslant 0$, l'hypothèse (2.3) est d'autant plus faible que $\varepsilon$ est proche de 2 ;

si $\Delta f \leqslant 0$, l'hypothèse (2.3) est d'autant plus faible que $\varepsilon$ est proche de zéro.

Enfin ce type d'hypothèse est quasi-optimal dans le sens que, par exemple à une variable x dans $\mathbb{R}$, si f'' est borné dans $\mathbb{R}$ et si $|f'(x)|$ ne tend pas vers l'infini quand $|x|$ tend vers l'infini alors l'injection de $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas compacte. En effet, soit $A > 0$ et $(x_n)$ une suite de $\mathbb{R}$ tels que pour tout n :

$$x_{n+1} - x_n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |f'(x_n)| \leqslant A.$$

Si $M \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$, soit $H \in ]0, \frac{1}{2}[$ tel que $MH \leqslant A$. Alors pour tout $x \in [x_n - H, x_n + H]$, on a $|f'(x)|\leqslant 2A$. Etant donné $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\varphi(x)=1$ pour $|x|\leqslant\frac{1}{4}$ et $\varphi(x)=0$ pour $|x|\geqslant\frac{1}{2}$ les fonctions $\varphi_n$ définies par $\varphi_n(x)=\varphi(x-x_n)$ ont les propriétés suivantes :

(i) $\varphi_n$ et $\varphi_m$ ont des supports disjoints si $n\neq m$

(ii) $\|\varphi_n\|=\|\varphi\|>0$

(iii) $\|(\partial_x-\partial_x f)\varphi_n\| \leqslant \|\varphi'\|+A\|\varphi\|$.

Ainsi la suite $(\varphi_n)$ est bornée dans l'espace $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ mais ne contient pas de sous-suite convergente dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Par contre, si f'' n'est pas borné, une hypothèse du type de (2.3) n'est bien sûr pas nécessaire. Voici, à titre d'exemple, un résultat qui ne fait pas intervenir de condition sur la dérivée seconde.

**Lemme 2.4 :** *Supposons que* $f$ *soit paire et que* $f'$ *soit* $>0$ *sur* $]0,+\infty[$. *S'il existe une constante* $C_0>0$ *telle que :*

$$\forall t>0,\ \mathrm{Max}_{x\in[0,t]} f'(x) \leqslant C_0 f'(t).$$

*alors on a l'estimation, pour tout* $u\in H^{1,\nabla f}(\mathbb{R})$ :

$$\int |f'|^2|u|^2\,dx \leqslant C\int |(\partial_x-f')u|^2\,dx.$$

*En conséquence, si de plus* $|f'|$ *tend vers l'infini quand* $|x|$ *tend vers l'infini, l'injection de* $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R})$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$ *est compacte.*

**Preuve** : Grâce à l'hypothèse de parité, il suffit d'évaluer $|f'|^2|u|^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $u\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs réelles, en notant $v\equiv ue^{-f}$ et en choisissant R tel que $u(x)=0$ pour $|x|\geqslant R$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f'u\|^2_{\mathbb{R}_+} &= -\int_0^R (f'(x))^2 e^{2f(x)}\left(\int_x^R v(t)\,v'(t)\,dt\right)dx\\
&= \int_0^R v(t)\,v'(t)\left(\int_0^t (f'(x))^2 e^{2f(x)}\,dx\right)dt\\
&\leqslant C_0\int_0^R v(t)\,v'(t)\,f'(t)\left(\int_0^t f'(x)\,e^{2f(x)}\,dx\right)dt\\
&= \tfrac{1}{2}C_0\int_0^R v(t)\,v'(t)\,f'(t)\,(e^{2f(t)}-e^{2f(0)})\,dt\\
&\leqslant \tfrac{1}{2}C_0\int_0^R v(t)\,v'(t)\,f'(t)\,e^{2f(t)}\,dt.
\end{aligned}$$

D'où le lemme. ∎

On peut donner une extension des résultats précédents (et donc du théorème 1.1) en séparant les variables. Ainsi du lemme 2.1 on déduit immédiatement que :

**Théorème 2.2'** : *Pour tout* $\varepsilon_j > 0$ *et* $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$ *il existe une constante* $C_{\varepsilon,\lambda} > 0$ *telle que pour tout* $u \in H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$, *on ait :*

(2.2') $$\int \sum_{j=1}^n \lambda_j\{(2-\varepsilon_j)|\partial_{x_j} f|^2 + \partial^2_{x_j} f\}\, |u|^2\, dx \leqslant C_{\varepsilon,\lambda} \sum_{j=1}^n \int |(\partial_{x_j} - \partial_{x_j} f)\, u|^2\, dx.$$

**Corollaire 2.3'** : *On suppose que :*

(2.3') *il existe des constantes* $\varepsilon_j > 0$ *et* $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$ *telles que*

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j\{(2-\varepsilon_j)|\partial_{x_j} f|^2 + \partial^2_{x_j} f\} \text{ tende vers l'infini quand } |x| \to +\infty.$$

*Alors l'injection de* $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *est compacte.*

En résumé, dans ce paragraphe 2, nous avons montré que l'espace $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans l'espace à poids $L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ où la fonction $\rho$ est de la forme

$$\rho = \left((2-\varepsilon)|\nabla f|^2 + \Delta f\right)^{1/2}$$

ou plus généralement

$$\rho = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\{(2-\varepsilon_j)|\partial_{x_j} f|^2 + \partial^2_{x_j} f\}\right)^{1/2}.$$

Si de plus, $\rho(x)$ tend vers l'infini quand $|x|$ tend vers l'infini, alors l'injection de $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est compacte.

Dans le §3 qui suit, on ne suppose plus que la fonction poids $\rho(x)$ tend vers l'infini quand $|x|$ tend vers l'infini, et on va voir comment on peut espérer de nouveaux résultats de compacité dans l'esprit de [He-Mo]. Pour simplifier, on gardera comme point de départ l'hypothèse (1.1) de [Mi].

## §3 Conditions d'ordre supérieur

Dans [He-Mo], on étend le résultat de compacité rappelé dans le théorème 1.2 en donnant un critère faisant intervenir les dérivées d'ordre $\geqslant 2$ du potentiel A.

En particulier, avec les notations du paragraphe 1, un des résultats de [He-Mo] est le suivant :

**Théorème 3.1** : *On suppose que*

(3.1) *il existe un entier* $r \geqslant 1$ *et une constante* $C > 0$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j,k=1}^n \sum_{|\alpha|=r} |\partial_x^\alpha b_{j,k}(x)| \leqslant C(1 + \sum_{j,k=1}^n \sum_{|\alpha|\leqslant r-1} |\partial_x^\alpha b_{j,k}(x)|)$$

*Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $u \in H^{1,iA}(\mathbb{R}^n)$ *on ait :*

$$\int (1+\sum_{j,k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\leqslant r-1}|\partial_x^\alpha b_{j,k}(x)|\,)^{2^{-r+1}}|u|^2\,dx \leqslant$$
$$C\,\Big(\sum_{j=1}^{n}\int|(\partial_{x_j}-iA_j)u|^2\,dx+\int|u|^2\,dx\Big).$$

De cette estimation, il résulte évidemment que si :

$$\sum_{j,k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\leqslant r-1}|\partial_x^\alpha b_{j,k}(x)| \to +\infty \text{ quand } |x| \to +\infty,$$

Alors l'injection de $H^{1,iA}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est compacte.

Ce résultat, présenté dans un cadre plus général dans [He-Mo] a été ensuite étendu par Meftah [Me] (cf aussi Iwatsuka [Iw], Dufresnoy [Du] et Mohamed [Mo]).

Dans l'esprit de ces résultats et en utilisant les techniques de [He-Mo], on va établir l'estimation a priori suivante en prenant comme point de départ l'hypothèse simplificatrice de [Mi] donnée en (1.1).

**Théorème 3.2 :** *On suppose que*

(3.2) *il existe une constante* $0 < C < 2$ *et une constante* $D$ *telles que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$D + C|\nabla f(x)|^2 + \Delta f(x) \geqslant 0.$$

(3.3) *il existe un entier* $r \geqslant 2$ *et une constante* $C > 0$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{|\alpha|=r+1}|\partial_x^\alpha f(x)| \leqslant C(1+\sum_{|\alpha|\leqslant r}|\partial_x^\alpha f(x)|\,)$$

*Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $u \in H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ *on ait :*

$$\text{(3.4)}\qquad \int (1+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant r}|\partial_x^\alpha f(x)|\,)^{2^{-r+2}}|u|^2\,dx \leqslant$$
$$C\,\Big(\sum_{j=1}^{n}\int|(\partial_{x_j}-\partial_{x_j}f)u|^2\,dx+\int|u|^2\,dx\Big).$$

**Démonstration :** On suit étroitement la démonstration du théorème 3.1 donnée dans [He-Mo].

Pour simplifier, on note :

$$m(x) = 1+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant r}|\partial_x^\alpha f(x)|.$$

Pour tout $\tau > 0$, il existe une partition de l'unité $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$, notée $(\chi_k)$, et une suite de points de $\mathbb{R}^n$, notée $(x_k)$, telles que :

$$\begin{cases} \sum_k \chi_k^2(x) = 1 \\ \chi_k(x) = 0 \text{ pour } |x - x_k| \geqslant \tau \\ |\partial^\alpha \chi_k| \leqslant C_\alpha \tau^{-|\alpha|} \quad \text{pout tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \end{cases}$$

(pour une constante $C_\alpha$ ne dépendant ni de k, ni de $\tau$).

Pour $\tau > 0$ assez petit, il résulte de l'hypothèse (3.3) que la fonction $\Psi$ définie par :

$$\Psi = \sum_k (1 + m(x_k))\, \chi_k^2$$

est $C^\infty$ et vérifie pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$(3.5) \qquad |\partial^\alpha \Psi(x)| \leqslant C_\alpha \Psi(x).$$

L'hypothèse (3.2) permet de voir que pour une constante C et $\tau$ assez petit on a :

$$(3.6) \qquad C^{-1} m \leqslant \Psi \leqslant C m.$$

Pour établir l'estimation cherchée (3.4), on définit pour tout $s \geqslant 0$, l'ensemble $M^s$ des fonctions T qui sont $C^\infty$ et pour lesquelles il existe une constante C telle que pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$(3.7) \qquad \int |\Psi^{-1+s} T u|^2\, dx \leqslant C \sum_{j=1}^n \int |(\partial_{x_j} - \partial_{x_j} f) u|^2\, dx + \int |u|^2\, dx.$$

**Lemme :** *Si* $T \in M^s$ *vérifie qu'il existe* $C > 0$ *telle que pour tout* $\beta \in \mathbb{N}^n$ *avec* $1 \leqslant |\beta| \leqslant 2$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *on ait :*

$$(3.8) \qquad |\partial^\beta T(x)| \leqslant C \Psi(x),$$

*alors* $\partial^\alpha T \in M^{s/2}$ *pour* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *avec* $|\alpha| = 1$.

**Preuve :** En effet, pour $|\alpha| = 1$ et $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} &\int |\Psi^{-1+s/2} (\partial^\alpha T)\, u|^2\, dx \\ &\quad = - \int |\partial^\alpha (\Psi^{-2+s} \partial^\alpha T)\, u\, T u|\, dx - 2 \int |\Psi^{-2+s} \partial^\alpha T\, \partial^\alpha u\, T u|\, dx \\ &\quad \leqslant \Big[\int |\Psi^{-1+s} T u|^2\, dx\Big]^{1/2} \times \\ &\qquad \Big\{\Big[\int |\Psi^{1-s} \partial^\alpha (\Psi^{-2+s} \partial^\alpha T)\, u|^2\, dx\Big]^{1/2} + 2 \Big[\int |\Psi^{-1} \partial^\alpha T\, \partial^\alpha u|^2\, dx\Big]^{1/2}\Big\}. \end{aligned}$$

Or par hypothèse (3.8) sur T et (3.5) sur $\Psi$, les fonctions $\Psi^{1-s} \partial^\alpha (\Psi^{-2+s} \partial^\alpha T)$ et $\Psi^{-1} \partial^\alpha T$ sont bornées, donc pour une constante C on a pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$(3.9) \qquad \int |\Psi^{-1+s/2} (\partial^\alpha T)\, u|^2\, dx \leqslant C \Big[\int |\Psi^{-1+s} T u|^2\, dx\Big]^{1/2} \Big[\int (|u|^2 + |\partial^\alpha u|^2)\, dx\Big]^{1/2}.$$

Or par l'hypothèse (3.2) et l'estimation (2.1) du théorème 2.1 écrite avec $\lambda_j = 1$ et $\varepsilon_j = \varepsilon$ où $\varepsilon \in ]0, 2-C[$, il existe une constante C telle que pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$(3.10) \qquad \int |\partial^\alpha f\, u|^2\, dx \leqslant C\, \Big(\textstyle\sum_{j=1}^n \displaystyle\int |(\partial_{x_j} - \partial_{x_j} f) u|^2\, dx + \int |u|^2\, dx\Big),$$

d'où :

$$(3.11) \qquad \int |\partial^\alpha u|^2\, dx \leqslant C\, \Big(\textstyle\sum_{j=1}^n \displaystyle\int |(\partial_{x_j} - \partial_{x_j} f) u|^2\, dx + \int |u|^2\, dx\Big).$$

De (3.9) et (3.11) on déduit que $\partial^\alpha T \in M^{s/2}$. ∎

**Fin de la preuve du théorème (3.2) :** On est maintenant en mesure de démontrer l'estimation (3.4). En effet, d'après (3.10) on a :

$$\partial^\alpha f \in M^1 \quad \text{pour } |\alpha| = 1.$$

Si $r \geqslant 2$, l'hypothèse (3.3) et l'estimation (3.6) assurent que :

$$|\partial^\beta(\partial^\alpha f)| \leqslant C\, \Psi \quad \text{pour } |\alpha| = 1 \text{ et } 1 \leqslant |\beta| \leqslant 2.$$

Par conséquent, d'après la propriété de l'espace $M^1$ il en résulte que :

$$\partial^\alpha f \in M^{1/2} \quad \text{pour } |\alpha| = 2.$$

De proche en proche, on montre que :

$$\partial^\alpha f \in M^{2^{-|\alpha|+1}} \quad \text{pour } 1 \leqslant |\alpha| \leqslant r.$$

Comme $M^{s_1} \subset M^{s_2}$ si $s_2 \leqslant s_1$, il en résulte que $m \in M^{2^{-r+1}}$. C'est précisément l'estimation annoncée en (3.4). ∎

On note que l'hypothèse (3.2) a été utilisée uniquement pour obtenir l'estimation (3.10) des $\partial^\alpha f \,.\, u$ pour $|\alpha| = 1$.

De cette estimation, il résulte immédiatement le théorème suivant :

**Théorème 3.2 :** *On suppose que*

(3.12) *il existe une constante* $0 < C < 2$ *et une constante* D *telles que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$D + C|\nabla f(x)|^2 + \Delta f(x) \geqslant 0.$$

(3.13) *il existe un entier* $r \geqslant 1$ *tel que*

$$\textstyle\sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant r} |\partial_x^\alpha f(x)| \text{ tende vers l'infini quand } |x| \text{ tend vers l'infini.}$$

(3.14) *si* $r \geqslant 2$ *il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\textstyle\sum_{|\alpha| = r+1} |\partial_x^\alpha f(x)| \leqslant C(1 + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant r} |\partial_x^\alpha f(x)|\,).$$

*Alors l'injection de* $H^{1,\nabla f}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *est compacte.*

Le cas où $r = 1$ (sous les hypothèses (3.12) et (3.13)) n'est autre que le théorème 1.1.

## Références

[Av-He-Si] J. Avron, I. Herbst, B. Simon :
Schrödinger operators with magnetic fields I. General interactions
*Duke Math. Journal 45 (1978).*

[Du] A. Dufresnoy :
Un exemple de champ magnétique dans $\mathbb{R}^n$.
Duke Math. Journal 53 (3) (1983)

[He-Mo] B. Helffer, A. Mohamed :
Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique.
*Annales de l'institut Fourier, Grenoble 38 (2) 1988 p.95-113*

[Iw] A. Iwatsuka :
Magnetic Schrödinger operators with compact resolvent
*J. Math. Kyoto University 26 (3) 1986*

[Ko] J. Kohn :
Pseudo-differential operators and hypoellipticity
*Proc. Symp. Pure Math. 23 , AMS (1973), p.61-69*

[Ku-Ho-St] Kusuoka, Holley et Strook :

[Me] M. Meftah
Conditions suffisantes pour la compacité de la résolvante d'un opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique

[Mi] F.Mignot : lettre à P.Bolley juin 1989

[Mo] A. Mohamed
[1] Quelques remarques sur le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique
*Comm. in PDE, Vol.13, n°11, (1988) p.1415-1430*
[2] Exposé IV colloque de Saint Jean de Monts 1987